Содержание

Предисловие ко второму изданию

Любезного читателя, купившего, укравшего, одолжившего, взявшего в библиотеке или иным способом получившего в постоянное или временное владение настоящую книгу, прошу прочесть предисловие к первому изданию. Оно идёт сразу вслед за этим предисловием.

Но ведь читатель сначала должен решить, стоит ли ему хотя бы фрагментарно читать настоящую книгу. Поэтому сообщаю, на кого она рассчитана. **Настоящая книга рассчитана на образованных дилетантов**.

Приятно отметить, что ошибку в одном из чертежей первого тиража первого издания указал мне вовсе не математик, а лингвист доктор филологических наук Анатолий Фёдорович Журавлёв.

Книга не вышла бы в свет, если бы этого не пожелало издательство «Альпина нон-фикшн». Приношу глубокую признательность этому издательству в лице тех, чьё содействие я ощутил.

Это генеральный директор Павел Дмитриевич Подкосов. Именно он позвонил мне и предложил переиздать «Апологию математики». Он пошёл мне навстречу в важном для меня вопросе: сделать исключение из стандартов издательства и использовать букву ***ё*** с двумя диакритическими точками. Личное общение с ним было приятным и полезным.

Это менеджер проектов Александра Михайловна Шувалова. С ней я вёл постоянную переписку. Она взяла на себя труд быть посредником между автором и генеральным директором, а также между автором и редактором книги.

Это редактор книги Маргарита Евгеньевна Савина. Не будучи математиком, она провела героическую работу по редактированию книги хотя и популярной, но всё же математической. Более того, она поправила некоторые формулы в этой книге.

Предисловие к первому изданию

Редкий читатель добирается до середины предисловия, поэтому главное следует сказать в начале. В тексте этого сборника наряду со всем знакомыми кавычками-ёлочками и кавычками-лапками применяются *одинарные* кавычки. Они называются также *марровскими*. Закрывающая марровская кавычка имеет вид запятой, поднятой на верхнюю линию шрифта (иногда опрокинутой «вниз головой» и одновременно зеркально отражённой). Открывающая марровская кавычка также выглядит как поднятая запятая, но непременно либо отражённая, либо опрокинутая. Марровские кавычки применяются для обозначений понятий и смыслов, то есть тех абстрактных сущностей, которые есть лишь в нашем сознании. Надеюсь, что всё станет ясным из двух приводимых ниже примеров.

1. Фразу *Слово «число» выражает понятие числа* можно записать так: *Слово «число» выражает понятие ‘число’*.
2. Фразу *Смысл предложения «Петя съел яблоко» состоит в том, что Петя съел яблоко* можно записать так: *Смысл предложения «Петя съел яблоко» есть ‘Петя съел яблоко’*.

Пропуски в цитатах обозначены многоточием, заключённым в квадратные скобки […], чтобы читатель не путал его с многоточием, употреблённым автором цитаты.

В сборник вошли девять текстов, написанных автором в разное время, с 1965 по 2008 г. Все они были в своё время опубликованы[1]. Однако при подготовке сборника тексты подвергались переработке, иногда минимальной, а иногда довольно существенной. Наилучший способ получить представление об их тематике — заглянуть в содержание; все они в той или иной степени относятся (или хотя бы примыкают) к не имеющей чётких границ области знания, которую одни именуют *философией математики,* другие — *основаниями математики,* третьи — ещё как-нибудь. К этой же области принадлежат работы А. Н. Колмогорова и П. К. Рашевского, включённые в сборник в качестве приложений I и II. Автор имел честь быть учеником А. Н. Колмогорова и слушать лекции П. К. Рашевского во время учёбы в Московском университете.

Сочиняя включённые в сборник тексты, автор если кого и видел в качестве читателя, то отнюдь не профессионального математика. Уж скорее (в большинстве случаев) гуманитария. Правильнее всего будет сказать, что книга рассчитана на образованного дилетанта. Приходилось поэтому выбирать между понятностью и точностью. Предпочтение отдавалось понятности. (За неточности прошу прощения у коллег-математиков. Достигнуть абсолютной точности всё равно невозможно. Как, впрочем, и абсолютной понятности — вообще чего-либо абсолютного.) Тем не менее читателю-нематематику отдельные места могут показаться трудными для восприятия. Возможно также, что некоторую сообщаемую автором информацию он сочтёт избыточной, утяжеляющей чтение. Что ж, такие места автор советует пропускать, как и всё, что читатель посчитает неинтересным.

Должен также заметить, что отдельные сюжеты и даже рисунки повторяются в тексте сборника (но не в пределах одной и той же статьи). Вызвано это стремлением к тому,

---

[1] Сведения о предыдущих публикациях приведены в конце настоящего издания на с. 617.

чтобы каждую статью можно было читать как отдельное произведение, не обращаясь к другим статьям сборника. В большинстве случаев независимо друг от друга можно читать и разделы статей.

Хотел бы выразить глубокую благодарность заместителю главного редактора издательства «Амфора» Елене Сергеевне Суворовой, которая способствовала выходу в свет этой книги, и Татьяне Германовне Филатовой, которая эту книгу редактировала. Работать с ними было приятно.

Из предисловия к сборнику переводов «Математика в современном мире»

Современный мир неожиданно обнаружил, что математика уверенно расположилась в самых разных его частях и уголках[1]. Несмотря на то что вторжение математики продолжается — и со всё возрастающей интенсивностью, — удивление по этому поводу скорее даже убывает: математическая экспансия стала привычной. Сейчас уже все смирились со словосочетаниями «математическая биология», «математическая лингвистика», «математическая экономика», «математическая психология»; и какую дисциплину ни возьми, вряд ли кому-нибудь покажется невозможным присоединение к её наименованию эпитета «математический».

Распространение математики вширь сопровождается её проникновением вглубь; математика занимает теперь видное положение в жизни общества. Изменилось и традиционное представление о математиках: место паганелеобразных чудаков заняли молодые люди в ковбойках, увлекающиеся лыжным спортом. Всё большее число родителей желает определить своих детей в школы с математическим уклоном: математика стала модной профессией.

Исчерпывающие причины такого стремительного (в течение последних 10–15 лет) изменения роли математики

[1] Прошу читателя иметь в виду, что этот текст впервые был опубликован в 1967 г. К этому периоду и следует относить слово «современный».

в современном мире, конечно, легче будет установить будущим историкам науки, чем нам, наблюдающим его сегодня. Однако уже сейчас можно, пожалуй, сказать, что основная причина заключается не только и не столько в конкретных успехах последних лет, сколько в осознании необъятных возможностей применения математики и появлении возросших потребностей в использовании этих возможностей.

Тем не менее повсеместное проникновение математики некоторым кажется загадочным, а некоторым — подозрительным. В самом деле, не вызывает сомнений право на всеобщее признание, скажем, физики или химии: физика открывает нам новые мощные источники энергии и новые средства быстрой связи, химия создаёт искусственные ткани, а сейчас покушается и на создание искусственной пищи. (Сказанное не претендует, разумеется, на какое-либо определение и тем более ограничение роли физики и химии.) Неудивительно, что эти науки, помогающие человеку в его извечных поисках еды, одежды, источников силы и способов связи, прочно вошли в нашу жизнь, заняв в ней почётное место. А ведь математика проникла даже в науки, традиционно считающиеся гуманитарными. И хотя, например, в языкознании пользуются физическими приборами для исследования устной речи, никто не говорит о «физической лингвистике».

Так что же даёт людям математика, теоретическая наука, которая не открывает ни новых веществ, как химия, ни новых средств перемещения предметов или передачи сигналов, как физика? И почему появление в какой-либо отрасли науки математических методов исследования или хотя бы просто математического осмысления соответствующей системы понятий и фактов всегда означает достижение этой отраслью определённого уровня зрелости и начало нового этапа в её дальнейшем развитии? Наиболее распространённый в недавнем прошлом ответ состоял в том, что математика умеет хорошо вычислять и тем самым позволяет находить в нужных случаях требуемые цифровые данные. Однако при всей важности вычислительного аспекта математики — и особенно в последние годы, ознаменованные столь бурным развитием вычислительной техники, — этот аспект оказывается и второстепенным, и вторичным при попытке объяснить причины математизации современного мира.

Любая попытка дать краткое объяснение этих причин неизбежно приведёт к неполной и неточной формулировке. Если всё же заранее согласиться на это, то можно сказать следующее: математика предлагает весьма общие и достаточно чёткие модели для изучения окружающей действительности, в отличие от менее общих и более расплывчатых моделей, предлагаемых другими науками; действительность же так усложнилась (как за счёт познания новых её сторон, так и за счёт создания человеком новых её форм), что без упрощающих, огрубляющих, формализующих, охватывающих лишь одну сторону явления моделей ныне не обойтись. Появление таких моделей в какой-либо отрасли науки свидетельствует о том, что система понятий этой отрасли уточнилась настолько, что может быть подвергнута строгому и абстрактному, т. е. математическому, изучению. Такое изучение, в свою очередь, играет решающую роль в дальнейшем уточнении понятий, а следовательно, и в успешном их применении. Математическая модель нередко задаётся в виде особого «языка», предназначенного для описания тех или иных явлений. Именно так, в виде языка, возникли в XVII в. дифференциальное и интегральное исчисления. Важнейшим примером математического языка, описывающего количественную сторону явлений, служит «язык цифр»; вот почему упомянутый выше вычислительный аспект математики как производный от её основного языкового аспекта мы назвали вторичным. Замечательно, что, хотя математическая модель создаётся человеческим разумом, она, будучи создана, может стать предметом объективного изучения; познавая её свойства, мы тем самым познаём и свойства отражённой моделью реальности.

Сказанным обусловлен и специфический характер математических открытий. Естественно-научные открытия обнаруживают ранее неизвестные свойства окружающего мира. Математические же открытия обнаруживают ранее неизвестные свойства рассматриваемых моделей мира, а наиболее революционные открытия дают начало новым моделям. Так, поистине революционный характер носило осознание древними бесконечности натурального ряда, а точнее, создание такого понятия натурального числа (такой модели), при котором натуральных чисел оказывалось бесконечно много (ведь представление, что числовой ряд обрывается, скажем, на миллиарде, вряд ли могло быть опровергнуто прямым наблюдением). Возникнув как инструмент исследования мира, понятие натурального числа само стало предметом исследований, приведших к выявлению скрытых, но объективных свойств этого понятия. Поразительным достижением античной математики было, например, установление бесконечности множества[1] простых чисел — поразительным как по постановке вопроса о бесконечности, хотя и без употребления самого слова «бесконечность», так и по безукоризненной точности формулировки ответа (как гласит 20-е предложение книги IX Евклидовых «Начал», «простых чисел существует больше всякого предложенного количества простых чисел») и по неожиданной простоте доказательства. Точно так же принятая нами геометрическая картина мира неизбежно приводит к существованию несоизмеримых отрезков, потрясшему ещё пифагорейцев.

Появление новых моделей нередко означает принципиальный поворот в развитии математики. Один из таких

---

[1] *Множество* — принятый в математике синоним слова «совокупность».

переломных моментов связан с величайшими достижениями математической мысли прошлого века — открытием неевклидовой геометрии (правильнее сказать, «неевклидовых геометрий») и возникновением теории бесконечных множеств. Открытие неевклидовых геометрий знаменовало начало новой эры в математике: впервые было обнаружено, что одну и ту же сторону реального мира (в данном случае — его геометрическую структуру) можно отразить различными моделями, одинаково хорошо согласующимися с действительностью при определённых возможностях экспериментальной проверки. Теория множеств Г. Кантора продемонстрировала возможность строгого изучения бесконечности; она распространила на бесконечные совокупности понятие количества, замкнутое до того времени в рамки понятия натурального числа; оказалось, что не только конечные, но и бесконечные совокупности могут состоять из разного количества элементов.

Теория множеств дала универсальную систему понятий, которая охватила все существовавшие к тому времени математические теории. Вместе с тем при дальнейшем развитии теории множеств появились существенные трудности, не преодолённые полностью до сих пор. Исследования последних лет дают основания считать, что созданная Кантором «наивная теория множеств» описывает на самом деле не одну, а сразу несколько теоретико-множественных моделей, так что факты, верные в одной модели, могут быть неверны в другой[1]. Если это так (а по-видимому, это действительно так), то «наивная теория множеств» расщепится

[1] На первый взгляд кажется непостижимым, что у такого «наглядного понятия», как совокупность, могут быть разные математические модели; но ведь в прошлом веке, да и сейчас ещё, многим было столь же непонятно, что возможны различные математические модели «наглядного» представления о расположении прямых на плоскости.

на несколько моделей, подобно тому как основанная на непосредственных пространственных представлениях «наглядная» геометрия расщепилась в XIX в. на евклидову и неевклидовы. Подобное расщепление моделей происходит, пожалуй, всё же реже, чем обратный процесс, приводящий к возникновению на основе нескольких моделей одной обобщающей сверхмодели; именно так, путём отвлечения от частностей, возникают алгебраические понятия кольца, поля, группы, структуры и даже поглощающее их все понятие универсальной алгебры.

Мы видим, что модель Кантора оказывается недостаточно чёткой, а ведь выше говорилось именно о достаточной чёткости как о характерной черте математических моделей. Дело в том, что само понятие достаточной чёткости не абсолютно, а исторически обусловлено. Определения, открывающие собой евклидовы «Начала»: «Точка есть то, что не имеет частей», «Линия же — длина без ширины» и т.д., казались, вероятно, достаточно чёткими современникам Евклида (III в. до н.э.), а непреложность его системы в целом не подвергалась публичным сомнениям вплоть до 11 (23) февраля 1826 г., когда Н.И. Лобачевский сделал сообщение в отделении физико-математических наук Казанского университета. Зато именно сомнения в этой непреложности и привели в конечном счёте к современной (достаточно чёткой на сегодняшний день) формулировке евклидовой системы геометрии.

Итак, действительное значение математической строгости не следует преувеличивать и доводить до абсурда; здравый смысл в математике не менее уместен, чем во всякой другой науке. Более того, во все времена крупные математические идеи опережали господствующие стандарты строгости. Так было с великим открытием XVII в. — созданием основ анализа бесконечно малых (т.е. основ дифференциального и интегрального исчисления) Ньютоном и Лейбницем. Введённое ими в обиход понятие бесконечно малой определялось весьма туманно и казалось загадочным современникам (в том числе, по-видимому, и самим его авторам). Тем не менее оно с успехом использовалось в математике. Разработанный Ньютоном и Лейбницем символический язык не имел точной семантики (которая в удовлетворяющей нас сейчас форме была найдена лишь через полтораста лет), но даже и в таком виде позволял описывать и исследовать важнейшие явления действительности. Так было и с такими фундаментальными понятиями математики, как предел, вероятность, алгоритм, которыми пользовались, не дожидаясь их уточнения. Так обстоит дело и с «самым главным» понятием математики — понятием доказательства. «Со времён греков говорить “математика” — значит говорить “доказательство”» — этими словами открывается знаменитый трактат Николя Бурбаки «Начала математики»[1]. Однако читатель заметит, что знакомое ему ещё со школы понятие доказательства носит скорее психологический, чем математический характер. Доказательство (в общепринятом употреблении этого слова) — это всего лишь рассуждение, которое должно убедить нас настолько, что мы сами готовы убеждать с его помощью других. Несомненно, что уточнение этого понятия (во всей полноте его объёма) — одна из важнейших задач математики.

Трудовые будни математики по необходимости состоят в получении новых теорем, открывающих новые связи между известными понятиями (хотя и теперь ещё приходится слышать — правда, всё реже — удивлённое: «Как? Неужели ещё не всё открыто в этой вашей математике?»). Однако к этому математика отнюдь не сводится. Вот какие цели математического исследования считает важными великий математик А. Н. Колмогоров:

---

[1] Бурбаки Н. Теория множеств. М., 1965. С. 23.

> 1. Привести общие логические основы современной математики в такое состояние, чтобы их можно было излагать в школе подросткам 14–15 лет.
> 2. Уничтожить расхождение между «строгими» методами чистых математиков и «нестрогими» приёмами математических рассуждений, применяемых прикладными математиками, физиками и техниками.
>
> Две сформулированные задачи тесно связаны между собой. По поводу второй замечу, что, в отличие от времён создания Ньютоном и Лейбницем дифференциального и интегрального исчисления, математики умеют сейчас без большого промедления подводить фундамент логически безукоризненных математических построений под любые методы расчёта, родившиеся из живой физической и технической интуиции и оправдывающие себя на практике. Но фундамент этот иногда оказывается столь хитро построенным, что молодые математики, гордые пониманием его устройства, принимают фундамент за всё здание. Физики же и инженеры, будучи не в силах в нём разобраться, изготовляют для себя вместо него временные шаткие подмостки[1].

Непрерывное повышение уровня математической строгости одновременно с попытками представить самые сложные построения так, чтобы они стали интуитивно понятными, возникновение одних понятий и уточнение других, переставших удовлетворять новым требованиям, расщепление казавшихся ещё недавно незыблемыми моделей и образование новых обобщающих моделей — весь этот исполненный большого внутреннего драматизма процесс характерен для математики не менее, чем доказательство теорем (без

[1] Колмогоров А. Н. Простоту — сложному // Известия. 1962. 31 дек.

которого, впрочем, описанный процесс был бы совершенно бессодержателен, да и вообще не мог бы иметь места).

Математика подобна искусству — и не потому, что она представляет собой «искусство вычислять» или «искусство доказывать», а потому, что математика, как и искусство, — это особый способ познания. Имеет, быть может, смысл по аналогии с художественными образами говорить о математических образах как специфической для математики форме отражения действительности.

Математическое и гуманитарное: преодоление барьера

Поверх барьеров.

БОРИС ПАСТЕРНАК

Уточняйте значения слов.
Тогда человечество избавится
от большей части своих заблуждений.

РЕНЕ ДЕКАРТ

«Да, мой голубчик, — ухо вянет:
Такую, право, порешь чушь!»
И в глазках крошечных проглянет
Математическая сушь.

АНДРЕЙ БЕЛЫЙ. ПЕРВОЕ СВИДАНИЕ

Чем дальше, тем Белому становилось яснее…
что искусство и философия требуют примирения
с точными знаниями — «иначе и жить нельзя». <…>
Недаром прежде, чем поступить на филологический
факультет, он окончил математический.

ВЛАДИСЛАВ ХОДАСЕВИЧ

I

Никто не знает, сохранят ли грядущие века и тысячелетия сегодняшнее деление наук на естественные и гуманитарные. Но даже и сегодня безоговорочное отнесение математики к естественным наукам вызывает серьёзные возражения. Естественно-научная, прежде всего физическая, составляющая математики очевидна, и нередко приходится слышать, что математика — это часть физики, поскольку она, математика, описывает свойства внешнего, физического мира. Но с тем же успехом её можно считать частью психологии, поскольку изучаемые в ней абстракции суть явления нашего мышления, а значит, должны проходить по ведомству психологии. Не менее очевидна и логическая, приближающаяся к философской, составляющая математики. Скажем, знаменитую теорему Гёделя о неполноте, гласящую, что, какие способы доказывания ни установи, всегда найдётся истинное, но не доказуемое утверждение — причём даже среди утверждений о таких, казалось бы, простых объектах, как натуральные числа, — эту теорему с полным основанием можно считать теоремой теории познания.

В 1950-х гг. по возвращении с индийских научных конференций мои московские коллеги-математики с изумлением рассказывали, что в Индии математику — при стандартном разделении наук на естественные и гуманитарные — относят к наукам гуманитарным. И на этих конференциях им приходилось сидеть рядом не с физиками, как они привыкли, а с искусствоведами. К великому сожалению, у людей гуманитарно ориентированных математика нередко вызывает отторжение, а то и отвращение. Неуклюжее (и по содержанию, и по форме) преподавание математики в средней школе немало тому способствует.

Лет сорок назад было модно подчёркивать разницу между так называемыми *физиками* (к коим относили и математиков) и так называемыми *лириками* (к коим причисляли всех гуманитариев). Терминология эта вошла тогда в моду с лёгкой руки поэта Бориса Слуцкого, провозгласившего в 1959 г. в культовом стихотворении «Физики и лирики»:

Что-то физики в почёте,
Что-то лирики в загоне.
Дело не в сухом расчёте,
Дело в мировом законе.

Однако само противопоставление условных *физиков* условным *лирикам* вовсе не было вечным. По преданию, на воротах знаменитой Академии Платона была надпись: «Негеометр [нематематик. — *В. У.*] да не войдёт сюда!» С другой стороны, самоё математику можно называть младшей сестрой гуманитарной дисциплины юриспруденции: ведь именно в юридической практике Древней Греции, в дебатах на народных собраниях впервые возникло и далее шлифовалось понятие доказательства.

II

Можно ли и нужно ли уничтожать ставшие, увы, традиционными (хотя, как видим, и не столь древние!) границы между гуманитарными, естественными и математическими науками — об этом я не берусь судить. Но вот разрушить барьеры между представителями этих наук, между *лириками* и *физиками*, между гуманитариями и математиками — это представляется и привлекательным, и осуществимым. Особенно благородная цель — уничтожить этот барьер внутри отдельно взятой личности, т. е. превратить гуманитария отчасти в математика, а математика — отчасти в гуманитария. Обсуждая эту цель, полезно вспомнить некоторые факты из истории российской науки. Эти факты связаны в обратном хронологическом порядке с именами Колмогорова, Барсова и Ададурова (в другом написании — Адодурова).

Первая научная работа великого математика Андрея Николаевича Колмогорова [12 (25) апреля 1903, Тамбов — 20 октября 1987, Москва] была посвящена отнюдь не математике, а истории. В начале 1920-х гг., будучи семнадцатилетним студентом математического отделения Московского университета, он доложил свою работу на семинаре известного московского историка Сергея Владимировича Бахрушина. Она была опубликована посмертно[1] и чрезвычайно высоко оценена специалистами — в частности, руководителем Новгородской археологической экспедиции Валентином Лаврентьевичем Яниным. Выступая на вечере памяти Колмогорова, состоявшемся в Московском доме учёных 15 декабря 1989 г., он так охарактеризовал историческое исследование Колмогорова: «Эта юношеская работа в русле исторической науки занимает место, до которого её [исторической науки. — *В. У.*] развитие ещё не докатилось. Будучи опубликованной, она окажется впереди всей исторической науки». А в предисловии к вышеназванному посмертному изданию исторических рукописей Колмогорова В. Л. Янин писал: «Некоторые наблюдения А. Н. Колмогорова способны пролить свет на источники, обнаруженные много десятилетий спустя после того, как он вёл своё юношеское исследование». И там же:

Андрей Николаевич Колмогоров

> Андрей Николаевич сам неоднократно рассказывал своим ученикам о конце своей «карьеры историка». Когда работа была доложена им в семинаре, руководитель семинара профессор С. В. Бахрушин, одобрив результаты, заметил, однако, что выводы молодого исследователя не могут претендовать на окончательность,

[1] Колмогоров А. Н. Новгородское землевладение XV века. — М.: Физмат-лит, 1994.

так как «в исторической науке каждый вывод должен быть снабжён несколькими доказательствами» (!). Впоследствии, рассказывая об этом, Андрей Николаевич добавлял: «И я решил уйти в науку, в которой для окончательного вывода достаточно одного доказательства». История потеряла гениального исследователя, математика приобрела его.

Двадцать шестого апреля (по старому стилю, а по новому — 7 мая) 1755 г. состоялось торжественное открытие Московского университета. После молебна были сказаны четыре речи. Первая из них — и притом единственная прозвучавшая на русском языке — называлась «О пользе учреждения Московского университета». Произнёс её Антон Алексеевич Барсов [1 (12) марта 1730, Москва — 21 декабря 1791 (1 января 1792), там же]. Неудивительно, что в 1761 г. он был назначен профессором (в современных терминах — заведующим) на кафедру красноречия; вступление в эту должность ознаменовалось его публичной лекцией «О употреблении красноречия в Российской империи», произнесённой 31 января (11 февраля) 1761 г. Чем же занимался Барсов до того? Преподавал математику — именно с Барсова, в феврале 1755 г. специально для этой цели переведённого из Петербурга в Москву, и началось преподавание математики в Московском университете! Впоследствии Барсов прославился трудами по русской грамматике; ему же принадлежит и ряд предложений по русской орфографии, тогда отвергнутых и принятых лишь в XX в. К сожалению, портрет А. А. Барсова не сохранился.

Ещё раньше, в 1727 г., знаменитый математик Даниил Бернулли, работавший в то время в Петербургской академии наук, обратил внимание на студента этой академии Василия Евдокимовича Ададурова [15 (26) марта 1709, Новгород — 5 (16) ноября 1780, Москва]. В письме к известному математику Христиану Гольдбаху от 28 мая 1728 г. Бернулли отмечает значительные математические способности молодого человека и сообщает о сделанном Ададуровым открытии: сумма кубов последовательных натуральных чисел равна квадрату суммы их первых степеней: $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$. Математические заслуги Ададурова засвидетельствованы включением статьи о нём (с портретом, выполненным в технике силуэта) в биографический раздел однотомного «Математического энциклопедического словаря» (М., 1988). А из статьи «Ададуров» в первом томе «Нового энциклопедического словаря» Брокгауза и Ефрона мы узнаём, что Ададуровым написано несколько сочинений по русскому языку и, более того, что «в 1744 г. ему было поручено преподавать русский язык принцессе Софии, т. е. будущей императрице Екатерине II». Последующие изыскания (они были проведены братом автора этих строк Борисом Андреевичем Успенским) показали, что Ададуров является автором первой русской грамматики на русском же языке, составление каковой следует рассматривать как большое событие. Ведь важнейший этап в языковом сознании носителей какого бы то ни было языка — появление первой грамматики этого языка на том же самом языке; этот этап сравним с осознанием того, что кажущаяся пустота вокруг нас заполнена воздухом. Прибавим ещё, что с 1762 по 1778 г. Ададуров был куратором Московского университета — вторым после основавшего университет И. И. Шувалова.

Профиль Василия Евдокимовича Ададурова

Итак, даже если согласиться с традиционной классификацией наук, отсюда ещё не следует с неизбежностью аналогичная классификация учёных или учащихся. Приведённые факты показывают, что математик и гуманитарий способны уживаться в одном лице.

Здесь предвидятся два возражения. Прежде всего нам справедливо укажут, что Ададуров, Барсов, Колмогоров были выдающимися личностями, в то время как любые рекомендации должны быть рассчитаны на массовую аудиторию. На это мы ответим, что образцом для подражания — даже массового подражания — как раз и должны быть выдающиеся личности и что примеры Ададурова, Барсова, Колмогорова призваны вдохновлять. Далее нам укажут, опять-таки справедливо, что отнюдь не всем гуманитариям и отнюдь не всем математикам суждено заниматься научной работой, это и невозможно, и не до́лжно. Ну что ж, ответим мы, примеры из жизни больших учёных выбраны просто потому, что история нам их сохранила; сочетать же математический и гуманитарный подход к окружающему миру стоит даже тем гуманитариям и математикам, которые не собираются посвятить себя высокой науке, и это вполне посильная для них задача.

III

По всеобщему признанию, литература и искусство являются частью человеческой культуры. Ценность же математики, как правило, видят в её практических приложениях. Но наличие практических приложений не должно препятствовать тому, чтобы и математика рассматривалась как часть человеческой культуры. Да и сами эти приложения, если брать древнейшие из них — такие, скажем, как использование египетского треугольника (т. е. треугольника со сторонами 3, 4, 5) для построения прямого угла, — также принадлежат общекультурной сокровищнице человечества. (Чьей сокровищнице принадлежит шестигранная форма пчелиных сот, обеспечивающая максимальную вместимость камеры при минимальном расходе воска на строительство её стен, — этот вопрос мы оставляем читателю для размышления.) В Древнем Египте, чтобы получить прямой угол, столь необходимый при строительстве пирамид и храмов, поступали следующим образом. Верёвку делили на 12 равных частей; точки деления, служащие границами между частями, помечали, а концы верёвки связывали. Затем за верёвку брались три человека, удерживая её в трёх точках, отстоящих друг от друга на 3, 4 и 5 частей деления. Далее верёвку натягивали до предела — так, чтобы получился треугольник. По теореме, обратной к теореме Пифагора, треугольник оказывался прямоугольным, причём тот человек, который стоял между частью длины 3 и частью длины 4, оказывался в вершине прямого угла этого треугольника.

Раздел математики, сейчас называемый математическим анализом, в старые годы был известен под названием «дифференциальное и интегральное исчисление». Отнюдь не всем обязательно знать точное определение таких основных понятий этого раздела, как *производная* и *интеграл*. Однако каждому образованному человеку желательно иметь представление о *производном числе* как о мгновенной скорости (а также как об угловом коэффициенте касательной) и об *определённом интеграле* как о площади (а также как о величине пройденного пути). Поучительно знать и о знаменитых математических проблемах (разумеется, тех из них, которые имеют общедоступные формулировки) — решённых (как проблема Ферма и проблема четырёх красок[1]),

---

[1] *Проблема четырёх красок* заключается в требовании доказать следующий факт: любую мыслимую карту можно так раскрасить в четыре цвета, чтобы страны, имеющие общую границу, всегда были окрашены в разные цвета. Проблема ждала решения более ста лет.

ждущих решения (как проблема близнецов[1]) и тех, у которых решения заведомо отсутствуют (из числа задач на геометрическое построение и простейших задач на отыскание алгоритмов). Ясное понимание несуществования чего-либо — чисел ли с заданными свойствами, или способов построения, или алгоритмов — создаёт особый дискурс, который можно было бы назвать *культурой невозможного*. И культура невозможного, и предпринимаемые математикой попытки познания бесконечного значительно расширяют горизонты мышления.

Всё это, ломая традиционное восприятие математики как сухой цифири, создаёт образ живой области знания, причём *живой* в двух смыслах: во-первых, связанной с жизнью; во-вторых, развивающейся, т. е. продолжающей активно жить. Всякому любознательному человеку такая область знания должна быть интересна. Вообще, образованность предполагает ведь знакомство не только с тем, что непосредственно используется в профессиональной деятельности, но и с человеческой культурой как таковой, чьей неотъемлемой частью — повторим это ещё раз — является математика.

Здесь возможен следующий упрёк. Хотя в названии настоящего очерка политкорректно говорится о *преодолении барьера*, изложение явно уклоняется в сторону пропаганды «математического». Автор болезненно относится к такому упрёку и спешит оправдаться. Дело в том, что гуманитарная культура не нуждается в пропаганде: она не только повсеместно признана непременной частью культуры вообще,

[1] *Близнецами* называются такие два простых числа, разность между которыми равна двум: например, 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19, 29 и 31. Неизвестно, конечным или бесконечным является количество близнецовых пар; в требовании дать ответ на этот вопрос и состоит *проблема близнецов*. (Напомним, что *простым* называется такое большее единицы целое число, которое делится без остатка только на само себя и на единицу.)

но часто отождествляется с последней. Отличать ямб от хорея, понимать смысл выражения «всевышней волею Зевеса», а заодно и знать, кто такой Зевес, — все (или по крайней мере большинство) согласны в том, что подобные знания и умения входят в общеобязательный культурный багаж. Включение же в этот багаж чего-то математического в качестве обязательной составной части многим может показаться непривычным и потому нуждается в лоббировании.

IV

Однако образование состоит не только в расширении круга знаний. В неменьшей степени оно подразумевает расширение навыков мышления. Математик и гуманитарий обладают различными стилями мышления, и ознакомление с иным стилем обогащает и того и другого. Скажем, изучение широко распространённого в математике аксиоматического метода, дозволяющего использовать в рассуждениях только ту информацию, которая явно записана в аксиомах, прививает привычку к строгому мышлению. А знакомство со свойствами бесконечных множеств развивает воображение. Потребуются ли когда-нибудь, скажем, историку аксиоматический метод или бесконечные множества? Более чем сомнительно. Но вот строгость мышления и воображение не помешают и ему. С другой стороны, и математику есть чему поучиться у гуманитария. Последний более толерантен к чужому мнению, чем математик, и это говорится здесь в пользу гуманитария (разумеется, имеются в виду некоторые усреднённые — а то и воображаемые автором этих строк — гуманитарий и математик). Математические понятия резко очерчены, тогда как гуманитарные расплывчаты; и как раз эта расплывчивость делает их *более адекватными для описания окружающего нас расплывчатого мира*, поскольку его явления (или надо сказать «его феномены»?) сами расплывчаты. Математик ведь привык иметь дело с такими утверждениями, каждое из которых либо истинно, либо ложно, и эта привычка поневоле заставляет его видеть мир в чёрно-белом цвете. Его мышление настроено на более высокую контрастность или резкость (не знаю, какое слово здесь правильнее употребить). Ему, в отличие от гуманитария, чужда или непонятна мысль, что истина, может быть, и одна, но вот правда у каждого своя.

Поучительно сравнить между собой методы рассуждений, применяемые в математических и в гуманитарных науках. На самом деле речь идёт здесь о двух типах мышления, и человеку полезно познакомиться с каждым из них. Автор не берётся (потому что не умеет) описать эти типы, но попытается проиллюстрировать на двух примерах своё ви́дение их различия.

Пример первый. Все знают, что такое вода. Это вещество с формулой H_2O. Но тогда то, что мы все пьём, не вода. Разумеется, в повседневной речи и математик, и гуманитарий и то и то называет водой, но в своих теоретических рассуждениях первый как бы тяготеет к тому, чтобы называть водой лишь H_2O, а второй — всё, что имеет вид воды. Потому что математик изучает идеальные объекты, имеющие такой же статус, как, скажем, круги и треугольники, которых нет в реальной природе; гуманитарий же изучает предметы более реалистические. Боюсь, впрочем, что этот пример слишком умозрителен и способен отчасти запутать читателя.

Вот другой, уже не умозрительный, а взятый из жизни пример. Имеется строгое (кстати, в наиболее отчётливой форме сформулированное Колмогоровым) определение того, что такое ямб. Мы имеем здесь в виду не *ямбическую стопу* та-тА, понимание которой не вызывает затруднений, а *ямбическую строку*, которая может состоять отнюдь не из одних только ямбических стоп (как иногда ошибочно думают):

любая ямбическая стопа может быть всегда заменена пиррихием та-та (здесь оба слога безударны), а в особых случаях, впервые чётко указанных Тредиаковским, — и спондеем тА-тА (здесь оба слога ударны). Если в стихотворении встречается отклонение от законов, которым обязана подчиняться ямбическая строка, то, с точки зрения математика, это уже не ямб. Однако для многих филологов стихотворение, содержащее не слишком много нарушений, не перестаёт быть ямбическим — в то время как математик назовёт его всего лишь похожим на ямб, ямбоподобным.

По-видимому, математики, которых специально обучают обращению с абстракциями, начинают мыслить отчасти по-особому. Одни из них перестают это замечать и утверждаются в убеждении, что так мыслят все. Другие же достаточно трезво оценивают применимость своих ограниченных представлений к реальным ситуациям и с удовольствием рассказывают анекдоты про тех, кто этой ограниченности не замечает (или не желает замечать). Вот три таких анекдота.

Жена говорит мужу-математику: «Купи батон, а если будут яйца, возьми десяток». Муж приносит десять батонов. (Действительно, сказанное женой имеет — на формальном уровне — два смысла, и муж руководствуется тем из них, который аналогичен смыслу фразы: «Купи один батон, а если хватит денег, возьми десяток».)

Математика окликают с заплутавшего воздушного шара: «Где мы?» — «На воздушном шаре». (В другом, более пространном варианте анекдота после обмена репликами один из воздухоплавателей замечает: «Все ясно. Это математик». «С чего ты взял?» — спрашивает другой. «Он подумал, прежде чем ответить, и ответ дал совершенно точный — и совершенно бессмысленный».)

Пассажиры поезда наблюдают в окно нескончаемые стада белых овец. И вдруг замечают чёрную овцу, повернувшуюся к поезду боком. «О, здесь бывают и чёрные