

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

$\sin x = a$

$$a = \pm 1, x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n;$$

$$0 < a < 1,$$

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n;$$

$$-1 < a < 0,$$

$$x = (-1)^{n+1} \arcsin a + \pi n;$$

$$a = 0, x = \pi n$$

$\cos x = a$

$$a = 1, x = 2\pi n;$$

$$a = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n;$$

$$a = -1, x = \pi + 2\pi n;$$

$$0 < a < 1,$$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n;$$

$$-1 < a < 0,$$

$$x = \pm(\pi - \arccos a) + 2\pi n$$

$\operatorname{tg} x = a$

$$a = 0, x = \pi n;$$

$$-\infty < a < 0,$$

$$x = -\operatorname{arctg} a + \pi n;$$

$$0 < a < +\infty,$$

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n$$

$\operatorname{ctg} x = a$

$$a = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n;$$

$$0 < a < +\infty,$$

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n;$$

$$-\infty < a < 0,$$

$$x = \pi - \operatorname{arctg} |a| + \pi n$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СУММУ

$$1. \sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$2. \cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$3. \sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СУММ И РАЗНОСТЕЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ

$$1. \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$2. \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$3. \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$4. \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$5. \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

$$6. \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

$$7. \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

$$8. \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

$$1. (x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$1.1. (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$1.2. c' = 0$$

$$1.3. x' = 1$$

$$2. (\sin x)' = \cos x$$

$$3. (\cos x)' = -\sin x$$

$$4. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$5. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$6. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$7. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$8. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$9. (\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$10. (a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$11. (e^x)' = e^x$$

$$12. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, a > 0$$

$$13. (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

ЗНАКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

α (углы)	четверть	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$	I	+	+	+	+
$\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$	II	+	-	-	-
$\alpha \in (\pi; \frac{3\pi}{2})$	III	-	-	+	+
$\alpha \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$	IV	-	+	-	-

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Углы	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	0
	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°	0°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0	0
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1	1
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—	—

ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

$$1. \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$2. \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$3. \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$4. 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$5. 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$6. \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

$$7. \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$8. \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$9. \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha}$$

$$10. \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$11. \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$12. \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$13. \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$$

$$14. \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$15. \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$16. \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$17. \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

ДРОБИ

- $\frac{a}{b} = 0$, при $a = 0$; $b \neq 0$
- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$
- $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$
- $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$
- $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}$

ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

СТЕПЕНИ

- $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$ $n \in \mathbb{N}$, $a^1 = a$
- $a^0 = 1$, $a \neq 0$
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $a^m : a^n = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, при $a \neq 0$ и $n \in \mathbb{N}$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$
- $(\sqrt[n]{a})^2 = a$, если $a \geq 0$
- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, если $a \geq 0$, $b \geq 0$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, если $a \geq 0$, $b > 0$
- $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$

УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

- $ax = b$, при $a \neq 0$
- $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$
 $D = b^2 - 4ac$
 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
 { Если $D < 0$, то действительных корней нет
 Если $D = 0$, то $x_1 = x_2$

3. Теорема Виета:

- $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$
- $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
- $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

Если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, то система имеет единственное решение

Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то система не имеет решений

Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то система имеет бесконечное множество решений

СВОЙСТВА АРИФМЕТИЧЕСКОГО КОРНЯ

- $\sqrt[n]{a^n} = a$
- $(\sqrt[n]{a})^n = a$
- $2\sqrt[k]{a^{2k}} = |a|$, $k \in \mathbb{N}$
- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b > 0$
- $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$
- $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[n]{a^{n \cdot k}} = \sqrt[n]{a^{n \cdot k}}$

Во всех формулах
 $a \geq 0$, $b \geq 0$, $k > 1$,
 $m > 1$, $n > 1$

СВОЙСТВА ЛОГАРИФМА

Определение

$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$,
 $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$

$\log_a a^x = x$

Свойства

- $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$,
 $x > 0$, $y > 0$
- $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$,
 $x > 0$, $y > 0$
- $\log_a x^a = a \log_a x$
- $\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a x$
- $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$
- $\log_a \frac{1}{x} = \log_a 1 - \log_a x = -\log_a x$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
- $\log_a b \cdot \log_b a = 1$
- $\log_a a^x = \frac{1}{a} \log_a x$

Справочные материалы. Алгебра. Тригонометрия
 ООО «Попурри». Свидетельство о государственной
 регистрации издателя, изготовителя,
 распространителя печатных изданий № 1/150
 от 24.01.2014 г. Республика Беларусь, 220013,
 г. Минск, ул. Мележа, 5, корп. 2, к. 403.
 Отпечатано: СООО «Эволюйн».
 Свидетельство о ГРИИРПИ № 2/84 от 19.03.2014 г.
 Республика Беларусь, г. Минск, ул. Рыбалко, д. 9,
 оф. 35. Тираж 1000 экз. Заказ №
 © ООО «Попурри», 2016.

ISBN 978-985-15-2838-3

