В. Э. Жавнерчик
Л. И. Майсеня
Ю. И. Савилова

Справочник по математике и физике

3-е издание, переработанное

Минск
«Вышэйшая школа»
2022

УДК [51+53](075.3/.4)
ББК 22я721
Ж13

Р е ц е н з е н т ы: заведующий кафедрой высшей математики Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники кандидат физико-математических наук, доцент *Е.А. Баркова*; учитель физики высшей категории средней школы № 44 г. Минска *Н.А. Василевская*

Жавнерчик, В. Э.

Ж13 Справочник по математике и физике / В. Э. Жавнерчик, Л. И. Майсеня, Ю. И. Савилова. 3-е изд., перераб. – Минск : Вышэйшая школа, 2022. – 399 с. : ил.

ISBN 978-985-06-3386-6.

Приведены основные понятия, формулы, теоремы, законы математики и физики из общеобразовательных курсов. Материал систематизирован, дается в компактной форме, сопровождается большим количеством иллюстраций.

Первое издание вышло в 2011 г.

Для обучающихся в учреждениях общего среднего, профессионально-технического и среднего специального образования. Будет полезен при подготовке к централизованному тестированию.

УДК [51+53](075.3/.4)
ББК 22я721

ISBN 978-985-06-3386-6

ПРЕДИСЛОВИЕ

В справочнике приведены все понятия, формулы, утверждения и законы, которые определены программами изучения математики и физики как на базовом, так и на повышенном уровне в средних школах, гимназиях, лицеях и колледжах. Материал систематизирован, теоретические утверждения сопровождаются иллюстрациями. Многие математические методы решения представлены алгоритмически, что рационально для использования на практике и способствует самостоятельной деятельности учащихся. При подготовке справочника авторы ориентировались на прогрессивные, современные подходы в обучении математике и физике.

Комплексное, полное и компактное представление справочной информации из курсов математики и физики является особенностью данного издания, что обеспечивает эффективность его использования.

Справочник будет полезен для систематического изучения математики и физики на занятиях в учреждениях общего среднего, профессионально-технического и среднего специального образования. Он может быть использован для подготовки к централизованному тестированию и для повторения математики и физики в процессе обучения в учреждениях высшего образования.

Авторы

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\mathbf{N}$ – множество натуральных чисел
$\mathbf{Z}$ – множество целых чисел
$\mathbf{Q}$ – множество рациональных чисел
$\mathbf{I}$ – множество иррациональных чисел
$\mathbf{R}$ – множество действительных чисел
$=$ – равно
$\neq$ – не равно
$\equiv$ – тождественно равно
$\approx$ – приближенно равно
$>$ – больше
$<$ – меньше
$\geq$ – больше или равно
$\leq$ – меньше или равно
$\gg$ – существенно больше
$\ll$ – существенно меньше
$\in$ – знак принадлежности множеству
$\subset$ – знак включения множества
$\subseteq$ – знак включения или равенства множеств
$\cup$ – знак объединения множеств
$\cap$ – знак пересечения множеств
∞ – бесконечность
$|a|$ – модуль (абсолютная величина) числа a
$[a]$ – единица физической величины a
const – постоянная величина

МАТЕМАТИКА

I. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИКУ

1. Высказывания и типы теорем

Высказывания

Простое высказывание – повествовательное предложение, в отношении которого можно сказать, истинно оно или ложно. Высказывания обозначают A, B, C, … .

Высказывание «не A» обозначают $\overline{A}$, высказывание «если A, то B» обозначают $A \Rightarrow B$, а высказывание «A тогда и только тогда, когда B» обозначают $A \Leftrightarrow B$.

Типы теорем

Признак (или *достаточное условие*) для B – теорема типа $A \Rightarrow B$.

Обратная теорема к $A \Rightarrow B$ – теорема типа $B \Rightarrow A$.

Критерий (или *необходимое и достаточное условие*) для B – теорема типа $A \Leftrightarrow B$.

Противоположная к обратной теореме – теорема типа $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

Высказывание $A \Rightarrow B$ истинно тогда и только тогда, когда истинно высказывание $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$. На этом утверждении базируется *метод доказательства от противного*.

2. Множества

Понятие множества

Множество – первичное неопределяемое понятие. Характеризуется как набор *элементов*, обладающих одинаковым свойством. Множества обозначают A, B, X,…, а элементы множества – a, b, x,… .

Если элемент a принадлежит множеству A, то пишут: $a \in A$; если не принадлежит, – то $a \notin A$.

Конечное множество – множество с конечным количеством элементов.

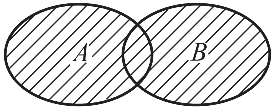
Пустое множество (обозначается $\varnothing$) – множество, в котором нет элементов.

Бесконечное множество – множество, которое не является ни конечным, ни пустым.

Множества A и B называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов. Пишут: $A = B$.

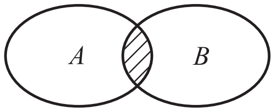
Множество A называется *подмножеством множества B*, если каждый элемент множества A есть элемент множества B; пишут: $A \subset B$ (или $B \supset A$). Если A не является подмножеством B, то пишут: $A \not\subset B$. Если $A \subset B$ или $A = B$, то пишут: $A \subseteq B$.

Действия над множествами



$A \cup B$

Объединение множеств A и B – множество $A \cup B$, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат или множеству A, или множеству B.



$A \cap B$

Пересечение множеств A и B – множество $A \cap B$, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат и множеству A, и множеству B.

Если $m(A)$ – количество элементов конечного множества A, $m(B)$ – количество элементов конечного множества B, то:

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B).$$

3. Совокупности и системы

Совокупность двух утверждений A, *B* – утверждение «A или B»; записывается с помощью квадратной скобки:

$$\left[\begin{array}{l} A, \\ B. \end{array}\right.$$

Система двух утверждений A, B – утверждение «A и B»; записывается с помощью фигурной скобки:

$$\begin{cases} A, \\ B. \end{cases}$$

Рассматривают также совокупности и системы трех (и более) утверждений, а также совокупности систем или системы совокупностей утверждений. В качестве утверждений могут быть уравнения, неравенства и т.д.

4. Метод математической индукции

Для доказательства справедливости утверждения $A(n)$ при всех натуральных $n \geq n_0$ $(n_0 \in \mathbf{N})$ необходимо сделать следующие три шага:

1) непосредственной проверкой убедиться в истинности $A(n_0)$;

2) предположить, что $A(k)$ истинно для любого фиксированного натурального k $(k \geq n_0)$;

3) доказать, что $A(k+1)$ истинно для всех $k \in \mathbf{N}$ $(k \geq n_0)$.

II. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

1. Числовые множества

Классификация числовых множеств

$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ – *множество натуральных чисел*;

$\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ – *множество целых чисел*;

Q – *множество рациональных чисел*, определяемое двумя способами:

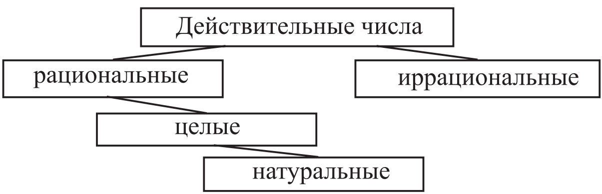
1) множество всех обыкновенных дробей $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbf{Z}$; $n \in \mathbf{N}$;

2) множество всех бесконечных периодических десятичных дробей;

I – *множество иррациональных чисел*, определяемое как множество всех бесконечных непериодических десятичных дробей;

R – *множество действительных чисел*:

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}.$$



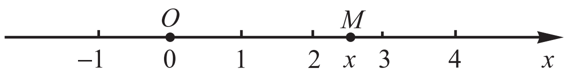
Четные и нечетные натуральные числа:
$2n$ – формула *четных чисел* ($n \in \mathbf{N}$);
$2n-1$ – формула *нечетных чисел* ($n \in \mathbf{N}$).

Некоторые иррациональные числа:

$$e = 2,718281828\ldots, \quad \pi = 3,141592653\ldots,$$
$$\sqrt{2} = 1,414213562\ldots, \quad \sqrt{3} = 1,732050807\ldots,$$
$$\sqrt{5} = 2,236067977\ldots.$$

Геометрическое истолкование действительных чисел

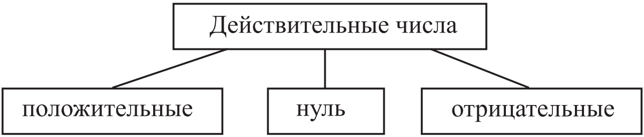
Числовая ось (или *координатная прямая*) – прямая с заданными на ней началом отсчета, направлением и единичным отрезком.



Координата точки M на оси Ox – число, которое соответствует этой точке; пишут: $M(x)$.

Между множеством точек числовой оси и множеством действительных чисел установлено взаимно однозначное соответствие.

Число a называется *положительным* (пишут: $a > 0$), если соответствующая точка на числовой оси лежит справа от точки $O(0)$, и *отрицательным* (пишут: $a < 0$) – если она лежит слева.



a и $-a$ – *противоположные числа* ($a \in \mathbf{R}$);

a и $\dfrac{1}{a}$ – *обратные числа* ($a \in \mathbf{R},\ a \neq 0$).

2. Числовые промежутки

Отрезок:

$[a, b]$

$a \leq x \leq b$

Интервал:

(a, b)

$a < x < b$

Полуинтервалы:

$[a, b)$

$a \leq x < b$

$(a, b]$

$a < x \leq b$

Числовые лучи:

$(-\infty, b]$

$x \le b$

$(-\infty, b)$

$x < b$

$[a, +\infty)$

$x \ge a$

$(a, +\infty)$

$x > a$

Числовая прямая:

$(-\infty, +\infty)$

$x \in \mathbf{R}$

3. Десятичная система счисления

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 – *цифры*.

Если $n \in \mathbf{N}$, то в десятичной системе счисления

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

где a_0 – цифра единиц; a_1 – цифра десятков; a_2 – цифра сотен и т.д., причем $a_k \ne 0$; k – разряд цифры. Пишут также: $n = \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0}$.

В частности:

$\overline{a_1 a_0} = 10a_1 + a_0$ – позиционная запись двузначного натурального числа ($a_1 \ne 0$);

$\overline{a_2a_1a_0} = 100a_2 + 10a_1 + a_0$ – позиционная запись трехзначного числа ($a_2 \neq 0$).

4. Действия над действительными числами

Компоненты действий

Сложение: $a+b$ – *сумма*, a и b – *слагаемые*.

Вычитание: $a-b$ – *разность*, a – *уменьшаемое*, b – *вычитаемое*.

Умножение: ab (или $a \cdot b$, $a \times b$) – *произведение*, a – *множимое*, b – *множитель*, a и b – *сомножители*.

Деление: $\dfrac{a}{b}$ (или $a:b$) – *частное*, a – *делимое*, b – *делитель* ($b \neq 0$).

Действия над положительными и отрицательными числами

При сложении двух чисел с одинаковыми знаками складывают их модули и перед суммой ставят общий знак. При сложении двух чисел с разными знаками из большего модуля одного из них вычитают меньший модуль другого и ставят знак того числа, у которого модуль больше. Сумма двух противоположных чисел равняется нулю.

Вычитание одного числа из другого можно заменить сложением; при этом уменьшаемое берут со своим знаком, а вычитаемое – с противоположным.

При умножении двух чисел умножают их модули и перед произведением ставят плюс, если знаки сомножителей одинаковы, и минус, – если знаки разные.

При делении двух чисел модуль делимого делят на модуль делителя и перед частным ставят плюс, если знаки делимого и делителя одинаковые, и минус – если знаки разные.

Законы сложения и умножения чисел

$a+b=b+a$ – переместительный закон сложения;
$ab=ba$ – переместительный закон умножения;
$a+(b+c)=(a+b)+c$ – сочетательный закон сложения;
$a(bc)=(ab)c$ – сочетательный закон умножения;
$a(b+c)=ab+ac$ – распределительный закон.

Деление с остатком

Формула деления с остатком:

$$\frac{a}{b}=c+\frac{r}{b} \text{ или } a = bc + r,$$

где a – *делимое*; b – *делитель*; c – *частное*; r – *остаток*; $a, b, c, r \in \mathbf{Z};\ 0 \le r < |b|$.

Если $r \ne 0$, то число a делится на число b с остатком. В таком случае говорят, что c – *неполное частное*.

Если $r=0$, то число a делится на число b нацело (без остатка). В таком случае говорят, что c – *полное частное*. Число a называется *кратным* числу b.

5. Признаки делимости натуральных чисел

На **2** делится число, последняя цифра которого четная или нуль.

На **3** делится число, сумма цифр которого делится на 3.

На **4** делится число, две последние цифры которого нули или образуют число, делящееся на 4.

На **5** делится число, последняя цифра которого 5 или 0.

На **6** делится число, которое делится и на 2, и на 3.

На **7** делится число, у которого разность между числом, выраженным тремя последними цифрами, и числом, выраженным остальными цифрами, делится на 7.

На **8** делится число, три последние цифры которого нули или образуют число, делящееся на 8.

На **9** делится число, сумма цифр которого делится на 9.

На **10** делится число, последняя цифра которого нуль.

На **11** делится число, у которого разность суммы цифр, занимающих четные места, и суммы цифр, занимающих нечетные места, делится на 11.

На **13** делится число, у которого разность между числом, выраженным тремя последними цифрами, и числом, выраженным остальными цифрами, делится на 13.

На **25** делится число, две последние цифры которого нули или образуют число, делящееся на 25.

На **100** делится число, две последние цифры которого нули.

На **125** делится число, три последние цифры которого нули или образуют число, делящееся на 125.

6. Простые и составные числа

Основные понятия

Натуральное число p, которое имеет только два делителя (1 и p), называется *простым*. Натуральное число p, имеющее другие делители кроме 1 и p, называется *составным*. Число 1 не относится ни к простым, ни к составным.

Основная теорема арифметики. Всякое составное число единственным образом может быть представлено в виде произведения простых чисел (разложено на простые множители).

Таблица простых чисел, не превосходящих 1000:

2	3	5	7	11	13	17	19
23	29	31	37	41	43	47	53
59	61	67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113	127	131
137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251	257	263
269	271	277	281	283	293	307	311
313	317	331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397	401	409

419	421	431	433	439	443	449	457
461	463	467	479	487	491	499	503
509	521	523	541	547	557	563	569
571	577	587	593	599	601	607	613
617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719
727	733	739	743	751	757	761	769
773	787	797	809	811	821	823	827
829	839	853	857	859	863	877	881
883	887	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	997

Наибольший общий делитель

Наибольший общий делитель натуральных чисел $a, b, ..., c$ (обозначается НОД$(a, b, ..., c)$) – наибольшее натуральное число, на которое делится без остатка каждое из данных чисел.

Числа a, b $(a, b \in \mathbf{N})$ называются *взаимно простыми*, если НОД$(a, b) = 1$.

Правило нахождения НОД $(a, b, \ldots, c)$:

1) каждое из чисел $a, b, ..., c$ разложить на простые множители;

2) в качестве НОД записать произведение всех множителей, входящих в разложение каждого из чисел, причем с наименьшим из показателей, с которыми они встречаются в разложениях.

Наименьшее общее кратное

Наименьшее общее кратное натуральных чисел $a, b, ..., c$ (обозначается НОК$(a, b, ..., c)$) – наименьшее натуральное число, которое делится без остатка на каждое из данных чисел.

Правило нахождения НОК $(a, b, \ldots, c)$:

1) каждое из чисел $a, b, ..., c$ разложить на простые множители;

2) в качестве НОК записать произведение всех множителей, входящих в разложение хотя бы одного из чисел, причем с наибольшим из показателей, с которыми они встречаются в разложениях.

Если $a, b \in \mathbf{N}$, то

$$ab = \text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b).$$

7. Обыкновенные дроби

Основные понятия

Обыкновенная дробь – число вида $\frac{m}{n}$, где m – *числитель дроби*, $m \in \mathbf{Z}$; n – *знаменатель дроби*, $n \in \mathbf{N}$.

Несократимая дробь – дробь, числитель и знаменатель которой – взаимно простые числа.

Правильная дробь – дробь, модуль числителя которой меньше знаменателя.

Неправильная дробь – дробь, числитель которой больше знаменателя (по модулю) или равен ему.

Смешанное число – число, которое содержит отличные от нуля целую и дробную части.

Основное свойство дроби:

$$\frac{m}{n}=\frac{mp}{np} \quad (p \neq 0).$$

Если $a, b, c, d \in \mathbf{N}$, то:

$$\frac{a}{c}>\frac{b}{c} \text{ при } a>b,$$

$$\frac{a}{b}>\frac{a}{c} \text{ при } b<c.$$

Действия над обыкновенными дробями

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}, \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}.$$

Если b, d – взаимно простые числа, то:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}, \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}.$$

Если числа b, d не являются взаимно простыми, то для сложения и вычитания дробей $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ необходимо сначала привести их к наименьшему общему знаменателю, который есть НОК (b, d).

$$\frac{a}{b}\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}, \quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

8. Пропорция

Отношение чисел a и b – дробь $\frac{a}{b}$; пишут также: $a:b$.

Пропорция – равенство двух отношений: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (или $a:b=c:d$), где a, d – *крайние члены пропорции*; b, c – *средние члены пропорции*.

Основное свойство пропорции:

$$ad=bc.$$

Если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то:

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}, \quad \frac{b}{a}=\frac{d}{c}, \quad \frac{d}{b}=\frac{c}{a}.$$

$\frac{ma+nb}{pa+qb}=\frac{mc+nd}{pc+qd}$ – *производные пропорции*, где m, n, p, q – действительные числа; $m^2+n^2\neq 0$; $pa+qb\neq 0$; $pc+qd\neq 0$.

В частности:

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}, \quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d},$$

$$\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}, \ \frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}, \ \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

Если $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$, то

$$\frac{a_1m_1+a_2m_2+...+a_nm_n}{b_1m_1+b_2m_2+...+b_nm_n}=\frac{a_1}{b_1},$$

где $b_1m_1+b_2m_2+...+b_nm_n \neq 0$; $m_1 \neq 0$.

Равенства отношений $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ понимают как систему равенств (пропорций):

$$\begin{cases} \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}, \\ \frac{a_1}{a_2}=\frac{c_1}{c_2}, \\ \frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}. \end{cases}$$

Чтобы разделить величину A на части *прямо пропорционально* числам $a, b, ..., c$ (т.е. в отношении $a:b:...:c$), необходимо вычислить:

$$\frac{Aa}{a+b+...+c},\quad \frac{Ab}{a+b+...+c}, \ldots, \quad \frac{Ac}{a+b+...+c}.$$

Чтобы разделить величину A на части *обратно пропорционально* числам $a, b, ..., c$ $\left(\text{т.е. в отношении}\ \frac{1}{a}:\frac{1}{b}:...:\frac{1}{c}\right)$, необходимо вычислить:

$$\frac{A\cdot\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+...+\frac{1}{c}},\quad \frac{A\cdot\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+...+\frac{1}{c}}, \ldots, \quad \frac{A\cdot\frac{1}{c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+...+\frac{1}{c}}.$$

9. Десятичные дроби

Понятие десятичной дроби

Десятичная дробь – обыкновенная дробь вида $\frac{m}{10^k}$, где $m \in \mathbf{Z}$; $k \in \mathbf{N}$.

Для десятичной дроби используется специальная форма записи: сначала записывают целую часть числа и справа от нее ставят запятую; первая цифра после запятой означает число десятых, вторая – сотых, третья – тысячных и т.д.

Десятичные знаки – цифры, стоящие после запятой.

Виды десятичных дробей

Конечная десятичная дробь – дробь с конечным количеством десятичных знаков.

Бесконечная периодическая десятичная дробь – дробь, у которой начиная с некоторого разряда одна цифра или группа цифр повторяется. *Период* этой дроби – повторяющаяся группа цифр (записывается в скобках).

Чисто периодическая дробь – дробь, в которой повторение цифр начинается с первой цифры после запятой.

Смешанная периодическая дробь – дробь, в которой повторение цифр начинается не сразу после запятой.

Действия над десятичными дробями

Сложение и вычитание конечных десятичных дробей выполняют так же, как сложение и вычитание целых чисел; при этом запятые располагают одну под другой. В полученном результате (сумме или разности) запятая находится под запятыми исходных компонентов действий.

Умножение конечных десятичных дробей выполняют так же, как умножение целых чисел, не обращая внимания на запятые. В полученном результате (произведении) количество десятичных знаков равно количеству цифр десятичных знаков обоих сомножителей.

Деление конечных десятичных дробей выполняют так же, как деление целых чисел; при этом умножают обе дроби на такую степень числа 10, чтобы делитель стал целым числом. В полученном результате (частном) запятая ставится тогда, когда деление целой части делимого закончено.

При сложении, вычитании, умножении и делении периодических дробей их переводят в обыкновенные дроби, а затем выполняют действия.

Обращение дробей

Чтобы *обратить обыкновенную дробь в десятичную*, нужно числитель обыкновенной дроби разделить на ее знаменатель по правилу деления десятичных дробей. При этом если знаменатель несократимой дроби раскладывается только на простые множители 2 и 5, то в результате получается конечная десятичная дробь; если он содержит иные простые множители, то получается бесконечная периодическая десятичная дробь.

Чтобы *обратить конечную десятичную дробь в обыкновенную*, нужно:

1) сохранить целую часть числа;

2) преобразовать дробную часть:

а) число, стоящее после запятой, записать числителем обыкновенной дроби;

б) в знаменателе написать 10^k, где k – количество цифр справа от запятой;

в) сократить, если возможно.

Чтобы *обратить чисто периодическую дробь в обыкновенную*, нужно:

1) сохранить целую часть числа;

2) преобразовать дробную часть:

а) период чисто периодической дроби записать числителем обыкновенной дроби;

б) в знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде;

в) сократить, если возможно.

Чтобы *обратить смешанную периодическую дробь в обыкновенную*, нужно:

1) сохранить целую часть числа;

2) преобразовать дробную часть:

а) из числа, стоящего после запятой до второго периода, вычесть число, стоящее после запятой до первого периода, и полученную разность записать числителем обыкновенной дроби;

б) в знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, со столькими нулями, сколько цифр между запятой и периодом;

в) сократить, если возможно.

Округление десятичных дробей

При округлении десятичной дроби сохраняют одну или несколько ее цифр, считая слева направо, и отбрасывают все последующие или (если это необходимо для сохранения разрядов) отбрасываемые цифры заменяют нулями.

Существует три способа округления чисел.

1. *Округление по правилу дополнения* (или просто *округление*):

1) если первая слева из отбрасываемых цифр числа меньше 5, то последняя сохраняемая цифра остается без изменения;

2) если первая слева из отбрасываемых цифр числа больше или равна 5, то последняя сохраняемая цифра усиливается (увеличивается на единицу).

2. *Округление с недостатком*: последняя сохраняемая цифра числа остается без изменения.

3. *Округление с избытком*: последняя сохраняемая цифра числа усиливается.

Абсолютная погрешность приближенного значения a числа A – число Δ, удовлетворяющее условию

$$|A-a| \le \Delta.$$

Относительная погрешность приближенного значения a ($a \neq 0$) числа A – число δ, удовлетворяющее условию

$$\left|\frac{A-a}{a}\right| \le \delta.$$

В частности, $\delta = \dfrac{\Delta}{|a|}$.

Стандартный вид числа

Стандартный вид числа:

$$a \cdot 10^k,$$

где $1 \le a < 10$; $k \in \mathbf{Z}$; k – *порядок числа*.

10. Проценты

Процент – сотая доля числа: $1\% = 0,01$.

Процентное отношение p чисел a и b – величина

$$p = \frac{a}{b} \cdot 100\%.$$

Чтобы найти $p\%$, которые составляет число a от числа b, используют формулу

$$p = \frac{a}{b} \cdot 100.$$

Чтобы найти число b по известному числу a, которое составляет $p\%$ от числа b, применяют формулу

$$b = \frac{a}{p} \cdot 100.$$

Чтобы найти число a, которое составляет $p\%$ от числа b, используют формулу

$$a = \frac{bp}{100}.$$

Промилле – тысячная доля числа: 1‰ = 0,001.

11. Неравенства

Понятие неравенства

Неравенство – два числа или два математических выражения, соединенных одним из следующих знаков: > (*больше*), < (*меньше*), ≥ (*больше или равно*), ≤ (*меньше или равно*).

$a > b$, $a < b$, $a \geq b$, $a \leq b$ тогда и только тогда, когда $a - b > 0$, $a - b < 0$, $a - b \geq 0$, $a - b \leq 0$ соответственно.

Неравенства, содержащие знак > или <, называются *строгими*, а неравенства, содержащие знак ≥ или ≤, – *нестрогими*.

Двойное неравенство $a < b < c$ записывается как система неравенств:

$$\begin{cases} b > a, \\ b < c. \end{cases}$$

Свойства числовых неравенств

Пусть $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, тогда:

- если $a < b$, то $a + c < b + c$;
- если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$;
- если $a < b$ и $c < 0$, то $ac > bc$;
- если $a < b$ и $ab > 0$, то $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$;
- если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$;
- если $0 < a < b$ и $0 < c < d$, то $ac < bd$;
- если $0 < a < b$ и $0 < c < d$, то $\dfrac{a}{d} < \dfrac{b}{c}$;
- если $0 < a < b$, то $a^n < b^n$ $(n \in \mathbf{N})$.

Некоторые полезные неравенства:

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2},\ \ a, b \ge 0 \text{ (равенство при } a = b);$$

$$a + \frac{1}{a} \ge 2,\ \ a > 0 \text{ (равенство при } a = 1);$$

$$a + \frac{1}{a} \le -2,\ \ a < 0 \text{ (равенство при } a = -1);$$

$$\sqrt{a+b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b},\ \ a, b \ge 0 \text{ (равенство при } ab = 0).$$

12. Характерные величины для действительных чисел

Модуль числа

Модуль (или *абсолютная величина*) *числа* x (обозначается $|x|$), где $x \in \mathbf{R}$, определяется следующим образом:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \ge 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Геометрический смысл модуля: $|x|$ – расстояние от точки 0 до точки x на числовой оси.

Свойства модуля числа. Если $x, y \in \mathbf{R}$, то:

$$|x| \ge 0,$$

$$|-x| = |x|,$$

$$|xy| = |x|\,|y|,$$

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \ne 0),$$

$$\left|x^c\right| = |x|^c \quad (x \ne 0,\ c \in \mathbf{Z}),$$

$$|x + y| \le |x| + |y|,$$

$$|x + y| \ge |x| - |y|,$$

$$|x - y| \ge |x| - |y|.$$

$|x| = a$ $(a > 0)$ тогда и только тогда, когда $x \in \{-a, a\}$;

$|x| < a$ $(a > 0)$ тогда и только тогда, когда $x \in (-a, a)$;

$|x| > a$ $(a > 0)$ тогда и только тогда, когда $x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$.

Знак числа

Знак (или *сигнум*) *числа* x (обозначается $\operatorname{sgn} x$ или $\operatorname{sign} x$), где $x \in \mathbf{R}$, определяется следующим образом:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Свойства знака числа:

$$x = |x| \operatorname{sgn} x, \qquad |x| = x \operatorname{sgn} x.$$

Целая часть числа

Целая часть числа x (обозначается $[x]$), где $x \in \mathbf{R}$, определяется как такое целое число, что

$$[x] \le x < [x] + 1.$$

Дробная часть числа

Дробная часть числа x (обозначается $\{x\}$), где $x \in \mathbf{R}$, определяется следующим образом:

$$\{x\} = x - [x].$$

13. Степени

Понятие степени

Степень – выражение вида a^k, определенное при некоторых значениях чисел a, k. Здесь a – *основание степени*, k – *показатель степени*.

Степень с целым показателем:

$$a^n = \underbrace{aa \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}} \quad (n \in \mathbf{N});$$

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0);$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0,\ n \in \mathbf{N}).$$

Степень с рациональным показателем ($k, m, n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$):

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad \text{где} \quad \begin{cases} a \in \mathbf{R}, & \text{если } n = 2k+1, \\ a \geq 0, & \text{если } n = 2k; \end{cases}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}, \quad \text{где} \quad \begin{cases} a \in \mathbf{R},\ a \neq 0, & \text{если } n = 2k+1, \\ a > 0, & \text{если } n = 2k. \end{cases}$$

Степень с иррациональным показателем a^p $(p \in \mathbf{I})$ определяется для любого $a > 0$ $(a \in \mathbf{R})$ с использованием понятия предела числовой последовательности.

Свойства степеней

Если $a, b, c \in \mathbf{R}$ и все степени определены, то:

$$a^b a^c = a^{b+c},$$

$$\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c} \quad (a \neq 0),$$

$$(a^b)^c = a^{bc},$$

$$a^c b^c = (ab)^c,$$

$$\frac{a^c}{b^c} = \left(\frac{a}{b}\right)^c \quad (b \neq 0).$$

Пусть $a, b, c \in \mathbf{R}$, тогда:

- если $a > 1$ и $b < c$, то $a^b < a^c$;
- если $0 < a < 1$ и $b < c$, то $a^b > a^c$;
- если $0 < a < b$ и $c > 0$, то $a^c < b^c$;
- если $0 < a < b$ и $c < 0$, то $a^c > b^c$.

14. Корни

Понятие корня

Корень n-й степени ($n \in \mathbf{N},\ n \ge 2$) из числа a (обозначается $\sqrt[n]{a}$) – такое действительное число, что $(\sqrt[n]{a})^n = a$. Здесь a – *подкоренное выражение*, n – *показатель корня*.

$\sqrt[n]{a}$ – *арифметическое значение корня*, если $a \ge 0$, $\sqrt[n]{a} \ge 0$:

$\sqrt[2k+1]{a}$ определен для всех $a \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N}$;

$\sqrt[2k]{a}$ определен для всех $a \ge 0$, $k \in \mathbf{N}$.

Свойства корней

Если $a, b \in \mathbf{R},\ k \in \mathbf{N}$, то:

$$\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a};$$

$$(\sqrt[n]{a})^n = a,\ \text{где} \begin{cases} a \in \mathbf{R}, & \text{если } n = 2k+1, \\ a \ge 0, & \text{если } n = 2k; \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{если } n = 2k+1, \\ |a|, & \text{если } n = 2k; \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \begin{cases} \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}, & \text{если } n = 2k+1, \\ \sqrt[n]{|a|}\sqrt[n]{|b|}, & \text{если } n = 2k,\ ab \ge 0; \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, & \text{если } n=2k+1,\ b\neq 0,\\[2ex] \dfrac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}, & \text{если } n=2k,\ ab\geq 0,\ b\neq 0.\end{cases}$$

Если $a\geq 0,\ m,n,\ p\in\mathbf{N},\ m\geq 2,\ n\geq 2$, то:

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m},$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a},$$

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}.$$

Если $b>0,\ a\geq\sqrt{b}$, то

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Устранение иррациональности в знаменателе дроби

В знаменателе дроби имеется иррациональность, если он содержит корни.

Умножая числитель и знаменатель дроби на одно и то же числовое выражение, отличное от нуля, заданную дробь сводят к равной ей, не содержащей корней в знаменателе:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a},$$

$$\frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{a-b},$$

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - c} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}}{a+b-c+2\sqrt{a}\sqrt{b}}$$

(далее преобразования выполняют в зависимости от выражения в знаменателе),

$$\frac{1}{\sqrt[4]{a} \pm \sqrt[4]{b}} = \frac{\sqrt[4]{a} \mp \sqrt[4]{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{(\sqrt[4]{a} \mp \sqrt[4]{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a-b},$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{a \pm b},$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2} \pm \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} = \frac{\sqrt[3]{a} \mp \sqrt[3]{b}}{a \mp b}.$$

15. Логарифмы

Понятие логарифма

Логарифм числа $b\,(b>0)$ *по основанию* $a\,(a>0,\ a\neq 1)$ – показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b (обозначается $\log_a b$).

Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b}=b.$$

$\lg b$ – *десятичный логарифм* (логарифм по основанию 10);

$\ln b$ – *натуральный логарифм* (логарифм по основанию e, $e\approx 2{,}7$);

$\log_c \log_a b$ – повторный логарифм ($c>0$, $c\neq 1$, $\log_a b>0$).

Свойства логарифмов

Если $a, b, c>0$, $a\neq 1$, то:

$$\log_a 1=0,$$

$$\log_a a=1,$$

$$\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c,$$

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c,$$

$$\log_a b^k=k\log_a b \quad (k\in\mathbf{R}),$$

$$\log_{a^m} b=\frac{1}{m}\log_a b \quad (m\in\mathbf{R},\ m\neq 0),$$

$$\log_a b=\log_{a^k} b^k \quad (k\in\mathbf{R},\ k\neq 0),$$

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (c\neq 1),$$

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a} \quad (b\neq 1),$$

$$c^{\log_a b}=b^{\log_a c}.$$

$\log_a b=\log_a c$ тогда и только тогда, когда $b=c$;

$\log_a b>\log_a c$, где $a>1$, тогда и только тогда, когда $b>c$;

$\log_a b>\log_a c$, где $0<a<1$, тогда и только тогда, когда $b<c$.

Обобщенные свойства логарифмов

Если $a, b>0$, $a\neq 1$ и $f(x)$, $g(x)$ – выражения с переменной, то:

$$\log_a(f(x)g(x)) = \log_a|f(x)| + \log_a|g(x)|,$$

где $f(x)g(x) > 0$;

$$\log_a\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \log_a|f(x)| - \log_a|g(x)|,$$

где $f(x)g(x) > 0$;

$$\log_a(f(x))^{2n} = 2n\log_a|f(x)|,$$

где $n \in \mathbf{N}$; $f(x) \neq 0$;

$$\log_{(f(x))^{2n}} b = \frac{1}{2n}\log_{|f(x)|} b,$$

где $n \in \mathbf{N}$; $\begin{cases} f(x) \neq 0, \\ f(x) \neq \pm 1. \end{cases}$

16. Средние величины

Если $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, то:

$A = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$ – *среднее арифметическое*;

$$G=\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \text{ – } \textit{среднее геометрическое},$$

где $a_1, a_2, ..., a_n > 0$;

$$H=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \text{ – } \textit{среднее гармоническое},$$

где $a_1, a_2, ..., a_n > 0$;

$$K=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}} \text{ – } \textit{среднее квадратическое}.$$

Теорема Коши. Если $a_1, a_2, ..., a_n > 0$, то

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \le \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

17. Факториал

Факториал – произведение всех последовательных натуральных чисел до определенного значения n ($n \in \mathbf{N}$):

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

По определению $0! = 1$.

Таблица факториалов ($n \le 10$):

n	$n!$	n	$n!$
1	1	6	720
2	2	7	5 040
3	6	8	40 320
4	24	9	362 880
5	120	10	3 628 800

III. ВЫРАЖЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ

1. Понятие выражения с переменными

Выражение $F(x, y, ..., z)$ *от переменных* $x, y, ..., z$ образуют с использованием чисел и переменных $x, y, ..., z$ из некоторого числового множества, над которыми производятся арифметические и функциональные операции.

В частности, $F(x)$ – выражение от одной действительной переменной x, если $x \in D \subseteq \mathbf{R}$.

Область допустимых значений (ОДЗ) *выражения* – множество всех наборов числовых значений переменных $x, y, ..., z$, при которых выражение $F(x, y, ..., z)$ имеет смысл.

Классификация выражений:

• *элементарное выражение* – выражение, содержащее только сложение, вычитание, умножение, деление переменных, возведение их в целую степень, извлечение арифметического корня и только те функциональные операции, которые соответствуют элементарным функциям;

• *специальное выражение* – выражение, содержащее функциональные операции, которые соответствуют специальным функциям;

• *алгебраическое выражение* – элементарное выражение, содержащее только сложение, вычитание, умножение, деление переменных, возведение их в целую степень и извлечение арифметического корня;

• *трансцендентное выражение* – элементарное выражение, содержащее возведение переменной в иррациональную степень, операции показательной, логарифмической, тригонометрических и обратных тригонометрических функций;

• *рациональное выражение* – алгебраическое выражение, содержащее только сложение, вычитание, умножение, деление переменных и возведение их в целую степень;

• *иррациональное выражение* – алгебраическое выражение, содержащее только сложение, вычитание, умножение, деление переменных, возведение их в целую степень и извлечение арифметического корня из переменной;

• *целое выражение* (или *многочлен*) – рациональное выражение, содержащее только сложение, вычитание, умножение переменных и возведение их в натуральную степень;

• *дробное выражение* (или *рациональная дробь*) – рациональное выражение, содержащее деление на переменную.

2. Формулы сокращенного умножения

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ – квадрат суммы;

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ – квадрат разности;

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ – разность квадратов;

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ – куб суммы;

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ – куб разности;

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ – сумма кубов;

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ – разность кубов;

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, где $n \in \mathbf{N}$;

$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \ldots - ab^{2n-1} + b^{2n})$, где $n \in \mathbf{N}$.

Бином Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} a^{n-k}b^k + \ldots + b^n,$$

где $n \in \mathbf{N}$.

Треугольник Паскаля:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccl}
 & & & & & & 1 & & & & & & & \quad & 0 \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \quad & 1 \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \quad & 2 \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \quad & 3 \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \quad & 4 \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \quad & 5 \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \quad & 6 \\
\multicolumn{13}{c}{\dotfill} & & n
\end{array}
$$

Числа с определенным номером n ($n \in \mathbf{N}$) в строке треугольника Паскаля являются последовательными коэффициентами в формуле бинома Ньютона для степени n.

3. Многочлены

Понятие многочлена с одной переменной

Многочлен n-й степени ($n \in \mathbf{N}$) с одной переменной x (записанный в стандартном виде) – выражение

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ – действительные *коэффициенты многочлена*, причем $a_n \neq 0$; $x \in \mathbf{R}$; a_n – *старший коэффициент*; a_0 – *свободный член*.

Многочлены обозначают $P(x), Q(x), \ldots$.

$a_k x^k$ – *одночлен k-й степени* ($k = 0, 1, ..., n$).

$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ – *приведенный многочлен.*

a_0 – *многочлен нулевой степени* ($a_0 \in \mathbf{R}$).

ax^2+bx+c – *квадратный трехчлен* ($a, b, c \in \mathbf{R},\ a \neq 0$).

Многочлены называются *равными*, если равны все их коэффициенты при соответствующих степенях x.

Если все коэффициенты многочлена $P(x)$ равны нулю, то говорят, что многочлен тождественно равен нулю: $P(x) \equiv 0\ \ (x \in \mathbf{R})$.

Действия над многочленами

Если $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, $Q(x) = b_m x^m + +b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0$, $m \leq n$, то:

$$cP(x) = ca_n x^n + ca_{n-1}x^{n-1} + ... + ca_1 x + ca_0 \quad (c \in \mathbf{R});$$

$$P(x) + Q(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + ... + \\ +(a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0),$$

где $b_k = 0$ для $k = m+1, m+2, ..., n$ при $m < n$.

При умножении многочленов каждый одночлен одного многочлена умножают на каждый одночлен другого многочлена, полученные результаты складывают и приводят подобные члены.

Формула деления многочленов:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \quad (Q(x) \neq 0)$$

или

$$P(x) = Q(x)S(x) + R(x),$$

где $S(x)$ – *частное*; $R(x)$ – *остаток*, причем степень многочлена $R(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$.

Если $R(x) \equiv 0$, то многочлен $P(x)$ делится на многочлен $Q(x)$ нацело, т.е.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) \text{ или } P(x) = Q(x)S(x).$$

Частное и остаток определяют однозначно, например с помощью деления «углом».

Схема Горнера. Если $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $Q(x) = x - x_0$ $(x_0 \in \mathbf{R})$, то

$$P(x) = Q(x)S(x) + r,$$

где $r \in \mathbf{R}$.

Коэффициенты многочлена

$$S(x) = c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \ldots + c_1 x + c_0$$

и остаток r вычисляют по формулам

$$\begin{cases} c_{n-1} = a_n,\ c_{n-2} = a_{n-1} + x_0 c_{n-1},\ \ldots,\ c_0 = a_1 + x_0 c_1, \\ r = a_0 + x_0 c_0 \end{cases}$$

с использованием таблицы

	a_n	a_{n-1}	$\ldots$	a_1	a_0
x_0	c_{n-1}	c_{n-2}	$\ldots$	c_0	r

Корни многочлена

Число x_0 ($x_0 \in \mathbf{R}$) называется *корнем многочлена* $P(x)$, если $P(x_0) = 0$.

Число x_0 называется *корнем кратности k многочлена* $P(x)$, если

$$P(x) = (x - x_0)^k S(x), \quad S(x_0) \neq 0.$$

Теорема Безу. Остаток от деления многочлена $P(x)$ на $x - x_0$ равен $P(x_0)$.

Следствие. Число x_0 является корнем многочлена $P(x)$ тогда и только тогда, когда $P(x)$ делится нацело на $x - x_0$.

Если приведенный многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами имеет целые корни, то они содержатся среди делителей свободного члена.

Разложение многочлена на множители

Если $P(x)$ – многочлен степени n, то его разложение на множители имеет общий вид

$$P(x) = A(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (x-x_k)^{n_k} \cdot$$
$$\cdot (a_1x^2+b_1x+c_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (a_mx^2+b_mx+c_m)^{r_m},$$

где $A, a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_m \in \mathbf{R}$; $x_1, x_2, \ldots, x_k$ – действительные корни многочлена; $n_1, n_2, \ldots, n_k, r_1, \ldots, r_m \in \mathbf{N}$; $n_1+n_2+\ldots+n_k+2r_1+\ldots+2r_m = n$; квадратные трехчлены не имеют действительных корней.

Методы разложения:

- *вынесение общего множителя за скобки*;
- *метод группировки*:

1) непосредственно – слагаемые заданного выражения объединяют в группы, имеющие общий множитель, вынесение которого приводит к одинаковым выражениям в скобках; затем снова используют метод вынесения общего множителя за скобки;

2) с предварительными преобразованиями слагаемых – вначале одно или несколько слагаемых заменяют тождественно равной суммой (разностью), а затем используют метод группировки;

- *использование формул разложения квадратного трехчлена на множители*:

$$ax^2+bx+c=$$
$$=\begin{cases} a(x-x_1)(x-x_2), \text{ если } D>0 \text{ и } x_1, x_2 - \text{корни}, \\ a(x-x_0)^2, \text{ если } D=0 \text{ и } x_0 - \text{корень}; \end{cases}$$

- *использование формул сокращенного умножения*;
- *замена переменной*: делают замену переменной для понижения степени выражения, раскладывают на множители, возвращаются к старой переменной и продолжают раскладывать;
- *выделение полного квадрата суммы и сведение к разности квадратов*: считая, что выражение содержит сумму квадратов, дополняют его удвоенным произведением величин, выделяют полный квадрат суммы и сводят выражение к разности квадратов, а затем раскладывают;
- *поиск корней многочлена среди делителей свободного члена*: если приведенный многочлен имеет целые коэффициенты, то целые корни (если они существуют) ищут среди делителей свободного члена, а затем раскладывают многочлен на множители, используя следствие из теоремы Безу.

Понятие многочлена с несколькими переменными

Одночлен с n переменными $(n \in \mathbf{N})$ – произведение числа и n различных переменных в натуральных степенях.

Степень одночлена с n переменными – сумма показателей степени.

Многочлен с несколькими переменными – сумма одночленов, содержащих эти переменные, причем каждая переменная входит хотя бы в один одночлен.

Степень многочлена с несколькими переменными – наибольшая степень его одночленов.

4. Рациональные дроби

Понятие рациональной дроби

Рациональная дробь – выражение вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x), Q(x)$ – многочлены; $Q(x) \neq 0$.

Если n – степень многочлена $P(x)$, m – степень многочлена $Q(x)$, то *правильная рациональная дробь* та, для которой $n < m$, а *неправильная* – для которой $n \geq m$.

Разложение рациональной дроби

Если задана неправильная дробь, то сначала необходимо выделить целую часть, а затем полученную правильную дробь разложить на сумму простейших.

Правильная рациональная дробь

$$\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)\cdot\ldots\cdot(x-c)} \quad (a, b, \ldots, c \in \mathbf{R})$$

представима суммой дробей:

$$\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)\cdot\ldots\cdot(x-c)}=$$
$$=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\ldots+\frac{C}{x-c},$$

где $A, B, \ldots, C$ – числовые коэффициенты, которые нужно найти.

Для нахождения $A, B, \ldots, C$ *методом неопределенных коэффициентов* необходимо:

1) в правой части равенства привести дроби к общему знаменателю и записать сумму в виде одной дроби;

2) приравнять числители заданной и полученной дробей;

3) многочлены в левой и правой частях равенства записать в стандартном виде;

4) приравнять коэффициенты при одинаковых степенях многочленов и получить систему уравнений относительно $A, B, \ldots, C$;

5) решить полученную систему и найти числовые значения коэффициентов $A, B, \ldots, C$;

6) записать разложение исходной дроби на сумму простейших дробей с найденными числовыми значениями коэффициентов $A, B, \ldots, C$.

IV. УРАВНЕНИЯ

1. Понятие уравнения

Уравнение – это равенство, содержащее одно или несколько неизвестных, при условии, что ставится задача нахождения всех тех значений неизвестных, при которых оно истинно.

Число a называется *корнем* (или *решением*) *уравнения*, если оно обращает это уравнение в верное числовое равенство. *Решить уравнение* – значит найти множество всех его решений (корней) или доказать, что таких нет.

Область допустимых значений (ОДЗ) *уравнения* – множество всех тех значений переменной (переменных), при которых определены все выражения, входящие в это уравнение.

Равносильные (или *эквивалентные*) *уравнения* – те уравнения, множества решений которых совпадают.

2. Линейное уравнение

Стандартный вид:

$$ax + b = 0,$$

где $a, b \in \mathbf{R}$.

Линейное уравнение:

1) при $a \neq 0$ имеет единственный корень $x = -\dfrac{b}{a}$;

2) при $a = 0, b \neq 0$ решений не имеет;

3) при $a = 0$, $b = 0$ имеет бесконечное множество решений: $x \in \mathbf{R}$.

3. Квадратное уравнение

Стандартный вид:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где $a, b, c \in \mathbf{R}$; $a \neq 0$.

$D = b^2 - 4ac$ – *дискриминант уравнения*.

Квадратное уравнение:

1) при $D > 0$ имеет два различных действительных корня:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a};$$

2) при $D = 0$ имеет единственный (двукратный) корень

$$x_0 = -\frac{b}{2a};$$

3) при $D < 0$ действительных корней не имеет.

Приведенное квадратное уравнение:

$$x^2 + px + q = 0,$$

где $p, q \in \mathbf{R}$.

Неполные квадратные уравнения:

- уравнение $ax^2 + bx = 0$ при $b \neq 0$ имеет корни

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{b}{a};$$

- уравнение $ax^2 + c = 0$ при $ac < 0$ имеет корни

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}};$$

- уравнение $ax^2 = 0$ имеет единственный корень

$$x_0 = 0.$$

Теорема Виета. Числа x_1, x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Числа x_1, x_2 – корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 x_2 = q. \end{cases}$$

4. Уравнение *n*-й степени

Стандартный вид:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

где $a_k \in \mathbf{R}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$; $a_n \neq 0$; $n \in \mathbf{N}$.

Частные случаи уравнения *n*-й степени:

$ax + b = 0$ – линейное;

$ax^2 + bx + c = 0$ – квадратное;

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ – *кубическое*;

$ax^4 + bx^2 + c = 0$ – *биквадратное* (сводится к квадратному уравнению заменой $y = x^2$).

Основные методы решения уравнения *n*-й степени $(n \geq 3)$:

- метод разложения многочлена на множители;
- метод замены переменной;
- поиск корней среди делителей свободного члена.

5. Дробно-рациональное уравнение

Стандартный вид:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0,$$

где $P(x)$, $Q(x)$ – многочлены.

На ОДЗ ($Q(x) \neq 0$) дробно-рациональное уравнение сводится к решению уравнения $P(x) = 0$. Проверяют, входят ли полученные корни в ОДЗ.

6. Иррациональные уравнения

Иррациональное уравнение – уравнение, в котором выражение с неизвестной содержится под знаком корня.

Методы решения:

- уравнение

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} = g(x) \quad (n \in \mathbf{N})$$

равносильно уравнению $f(x) = (g(x))^{2n+1}$;

- уравнение

$$\sqrt[2n]{f(x)} = g(x) \quad (n \in \mathbf{N})$$

сводится к уравнению-следствию $f(x) = (g(x))^{2n}$, корни которого проверяют подстановкой в исходное уравнение;

- уравнение

$$\sqrt[2n]{f(x)} = \sqrt[2n]{g(x)} \quad (n \in \mathbf{N})$$

сводится к уравнению-следствию $f(x) = g(x)$, корни которого проверяют подстановкой в исходное уравнение;

• уравнение

$$F\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)=0,$$

где F – некоторое выражение, заменой $y=\sqrt[n]{f(x)}$ сводится к уравнению $F(y)=0$. Решают последнее уравнение и возвращаются к переменной x.

7. Показательные уравнения

Показательное уравнение – уравнение, в котором выражение с неизвестной содержится в показателе степени при постоянном основании.

Методы решения:

• уравнение

$$a^{f(x)}=b \quad (a>0,\ a\neq 1,\ b>0)$$

равносильно уравнению $f(x)=\log_a b$;

• уравнение

$$a^{f(x)}=a^{g(x)} \quad (a>0, a\neq 1)$$

равносильно уравнению $f(x)=g(x)$;

• уравнение

$$F\left(a^{f(x)}\right)=0,$$

где F – некоторое выражение, заменой $y=a^{f(x)}$ сводится к уравнению $F(y)=0$. Решают последнее уравнение и возвращаются к переменной x.

8. Логарифмические уравнения

Логарифмическое уравнение – уравнение, в котором выражение с неизвестной содержится под знаком логарифма или в его основании.

Методы решения:

• уравнение

$$\log_{f(x)} g(x)=c \quad (c\in \mathbf{R})$$

равносильно уравнению $g(x)=f(x)^c$ на ОДЗ $\begin{cases} g(x)>0, \\ f(x)>0, \\ f(x)\neq 1; \end{cases}$

• уравнение

$$\log_{f(x)} g(x)=\log_{f(x)} h(x)$$

равносильно уравнению $g(x)=h(x)$ на ОДЗ $\begin{cases} f(x)>0, \\ f(x)\neq 1, \\ g(x)>0, \\ h(x)>0; \end{cases}$

- уравнение

$$\log_{f(x)} g(x) = \log_{h(x)} g(x)$$

равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{aligned} & g(x)=1, \\ & f(x)=h(x) \end{aligned}\right.$

на ОДЗ $\begin{cases} f(x)>0, \\ f(x)\neq 1, \\ h(x)>0, \\ h(x)\neq 1, \\ g(x)>0; \end{cases}$

- уравнение

$$F\left(\log_{f(x)} g(x)\right)=0,$$

где F – некоторое выражение, заменой $y=\log_{f(x)} g(x)$ сводится к уравнению $F(y)=0$. Решают последнее уравнение и возвращаются к переменной x.

9. Уравнения с модулем

Уравнение с модулем – уравнение, в котором выражение с неизвестной содержится под знаком модуля.

Методы решения:

- уравнение

$$|f(x)| = a \quad (a \in \mathbf{R}):$$

1) при $a < 0$ решений не имеет;

2) при $a = 0$ равносильно уравнению $f(x) = 0$;

3) при $a > 0$ равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x) = a, \\ f(x) = -a; \end{array}\right.$

- уравнение

$$a|f(x)| = b|g(x)| \quad (a, b > 0)$$

равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} af(x) = bg(x), \\ af(x) = -bg(x); \end{array}\right.$

- уравнение

$$|f(x)| = g(x)$$

решают методом промежутков.

Метод промежутков:

1) найти корни уравнения $f(x) = 0$;

2) нанести найденные корни на числовую ось;

3) определить знаки $f(x)$ для каждого из полученных промежутков;

4) нарисовать кривую знаков (как знаковую характеристику выражения $f(x)$);

5) решить уравнение на каждом промежутке в отдельности, проверяя, принадлежат ли найденные корни промежутку;

6) записать ответ, указав совокупность всех найденных корней.

Уравнение, содержащее несколько модулей, можно решать также методом промежутков.

10. Системы уравнений

Понятие системы уравнений

Система уравнений – множество уравнений, для которого требуется найти все значения неизвестных, удовлетворяющие каждому уравнению.

Решение системы – множество значений неизвестных, удовлетворяющих всем уравнениям системы.

Решить систему уравнений – значит найти множество всех ее решений или доказать, что система решений не имеет.

Совместная система – система, имеющая решение.

Несовместная система – система, которая не имеет решения.

Равносильные системы уравнений – те системы, множества решений которых совпадают.

Методы решения систем двух уравнений с двумя неизвестными

Метод подстановки: в каком-либо уравнении системы выражают одну неизвестную через другую и подставляют в другое уравнение с целью исключения одной неизвестной.

Метод сложения: уравнение системы умножают на число и прибавляют к другому уравнению, чтобы одна из неизвестных исчезла или было получено более простое уравнение.

Метод умножения (*деления*): если свободные члены системы уравнений не равны нулю, то одно из уравнений заменяют произведением (частным) исходных уравнений.

Метод замены переменной: одинаковые выражения в двух уравнениях системы заменяют двумя новыми переменными, решают полученную систему и возвращаются к первоначальным переменным или делают замену только в одном уравнении, которое решают отдельно, а затем возвращаются к решению системы.

Графический метод: строят графики функций или кривые, которые соответствуют уравнениям системы, и находят координаты их точек пересечения.

V. НЕРАВЕНСТВА

1. Неравенства с одной переменной

$$f(x) > 0, \quad f(x) \geq 0, \quad f(x) < 0, \quad f(x) \leq 0,$$

где $f(x)$ – выражение с переменной x при условии, что ставится задача нахождения всех тех значений x ($x \in \mathbf{R}$), при которых эти неравенства истинны.

Решение неравенства с одной переменной – такое значение переменной, при котором неравенство обращается в верное числовое неравенство.

Решить неравенство с одной переменной – значит найти множество всех его решений или доказать, что неравенство решений не имеет.

Равносильные неравенства – те неравенства, множества решений которых совпадают.

Несколько неравенств с одной переменной образуют совокупность, если ставится задача найти объединение множества решений заданных неравенств, и образуют систему, если ставится задача найти пересечение множества решений заданных неравенств.

2. Линейные неравенства

$$ax+b>0,\quad ax+b\geq 0,\quad ax+b<0,\quad ax+b\leq 0,$$

где $a, b \in \mathbf{R}$.

Решение линейных неравенств:

1) $ax+b>0$:

a	b	Множество решений
$a>0$	$b\in\mathbf{R}$	$\left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$
$a<0$	$b\in\mathbf{R}$	$\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$
$a=0$	$b>0$	$(-\infty, +\infty)$
	$b\leq 0$	Нет решений

2) $ax+b\geq 0$:

a	b	Множество решений
$a>0$	$b\in\mathbf{R}$	$\left[-\frac{b}{a}, +\infty\right)$
$a<0$	$b\in\mathbf{R}$	$\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right]$
$a=0$	$b\geq 0$	$(-\infty, +\infty)$
	$b<0$	Нет решений

Неравенства $ax+b<0$ и $ax+b\le 0$ сводятся к рассмотренным умножением на -1.

3. Квадратные неравенства

$$ax^2+bx+c>0,\quad ax^2+bx+c\ge 0,$$
$$ax^2+bx+c<0,\quad ax^2+bx+c\le 0,$$

где $a, b, c\in\mathbf{R}$; $a\ne 0$.

Решение квадратных неравенств. Пусть D – дискриминант квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, x_1 и x_2 $(x_1<x_2)$ – корни уравнения при $D>0$, x_0 – корень при $D=0$. Тогда:

1) $ax^2+bx+c>0$:

a	b	Множество решений
$a>0$	$D>0$	$(-\infty, x_1)\cup(x_2, +\infty)$
	$D=0$	$(-\infty, x_0)\cup(x_0, +\infty)$
	$D<0$	$(-\infty, +\infty)$
$a<0$	$D>0$	(x_1, x_2)
	$D\le 0$	Нет решений

2) $ax^2+bx+c\geq 0$:

a	b	Множество решений
$a>0$	$D>0$	$(-\infty, x_1]\cup[x_2, +\infty)$
	$D=0$	$(-\infty, +\infty)$
	$D<0$	$(-\infty, +\infty)$
$a<0$	$D>0$	$[x_1, x_2]$
	$D=0$	$\{x_0\}$
	$D<0$	Нет решений

Неравенства $ax^2+bx+c<0$ и $ax^2+bx+c\leq 0$ сводятся к рассмотренным умножением на -1.

4. Неравенства *n*-й степени

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 > 0$$
$$(\text{или} \geq 0,\ <0,\ \leq 0),$$

где $a_k\in\mathbf{R}$ $(k=0, 1, \ldots, n)$; $a_n\neq 0$; $n\in\mathbf{N}$.

Частные случаи неравенств *n*-й степени:

$ax + b > 0$ – линейное;

$ax^2 + bx + c > 0$ – квадратное.

Основной метод решения неравенств n-й степени при $n \geq 3$ – метод промежутков.

М е т о д п р о м е ж у т к о в:

1) разложить многочлен левой части неравенства на множители. Допустим, получено

$$(x - x_1)^{n_1}(x - x_2)^{n_2} \cdot ... \cdot (x - x_k)^{n_k} > 0,$$

где $n_1, n_2, ..., n_k \in \mathbf{N}$; $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$; $x_1 < x_2 < ... < x_k$;

2) нанести корни $x_1, x_2, ..., x_k$ многочлена на числовую ось;

3) поставить справа от большего корня x_k знак «+», далее (аналогично при «переходе» через остальные корни):

а) если n_k – нечетное число, то при «переходе» через корень x_k знак изменится на противоположный;

б) если n_k – четное число, то при «переходе» через корень x_k знак не изменится;

4) нарисовать кривую знаков (как знаковую характеристику выражения $f(x)$);

5) отметить те промежутки, которые соответствуют знаку неравенства;

6) записать ответ.

5. Дробно-рациональные неравенства

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} < 0, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0,$$

где $P(x)$, $Q(x)$ – многочлены.

Неравенство $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ равносильно неравенству $P(x)Q(x) > 0$; неравенство $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ равносильно системе $\begin{cases} P(x)Q(x) \geq 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$ Далее возможно использование метода промежутков.

Применяют также метод замены переменной: решают неравенство с новой переменной, а затем возвращаются к переменной x.

6. Показательные неравенства

Показательное неравенство – неравенство, в котором выражение с переменной содержится в показателе степени при постоянном основании.

М е т о д ы р е ш е н и я:

- неравенство

$$a^{f(x)} > b \quad (a > 0, \ a \neq 1, b \in \mathbf{R}):$$

1) при $b \leq 0$ имеет решение – множество всех x из ОДЗ выражения $f(x)$;

2) при $b > 0$ равносильно неравенству:

а) $f(x) < \log_a b$, если $0 < a < 1$;

б) $f(x) > \log_a b$, если $a > 1$;

• неравенство

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \quad (a > 0,\ a \neq 1)$$

равносильно неравенству:

1) $f(x) < g(x)$, если $0 < a < 1$;

2) $f(x) > g(x)$, если $a > 1$;

• неравенство

$$F\left(a^{f(x)}\right) > 0,$$

где F – некоторое выражение, заменой $y = a^{f(x)}$ сводится к неравенству $F(y) > 0$. Решают последнее неравенство и возвращаются к переменной x.

Аналогичный подход используют в решении показательных неравенств со знаками $\geq$, $<$, $\leq$.

7. Логарифмические неравенства

Логарифмическое неравенство – неравенство, в котором выражение с переменной содержится под знаком логарифма или в его основании.

Методы решения:

- неравенство

$$\log_a f(x) > b \quad (a > 0,\ a \neq 1,\ b \in \mathbf{R}):$$

1) при $0 < a < 1$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) < a^b; \end{cases}$

2) при $a > 1$ равносильно неравенству $f(x) > a^b$;

- неравенство

$$\log_{h(x)} f(x) > b \quad (b \in \mathbf{R})$$

равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ f(x) > 0, \\ f(x) < (h(x))^b, \end{cases} \\ \begin{cases} h(x) > 1, \\ f(x) > (h(x))^b; \end{cases} \end{array}\right.$

- неравенство

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

равносильно одной из систем:

1) $\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) < g(x), \end{cases}$ если $0 < a < 1$;

2) $\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > g(x), \end{cases}$ если $a > 1$;

- неравенство

$$\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$$

равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ f(x) > 0, \\ f(x) < g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} h(x) > 1, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x); \end{cases} \end{array} \right.$

- неравенство

$$F\left(\log_a f(x)\right) > 0,$$

где F – некоторое выражение, заменой $y = \log_a f(x)$ сводится к неравенству $F(y) > 0$. Решают последнее неравенство и возвращаются к переменной x.

Аналогичный подход используют в решении логарифмических неравенств со знаками $\geq$, $<$, $\leq$.

8. Неравенства с модулем

Неравенство с модулем – неравенство, в котором выражение с переменной содержится под знаком модуля.

М е т о д ы р е ш е н и я:

- неравенство

$$|f(x)| < a \quad (a \in \mathbf{R}):$$

1) при $a \le 0$ решений не имеет;

2) при $a > 0$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) > -a, \\ f(x) < a; \end{cases}$

- неравенство

$$|f(x)| \le a \quad (a \in \mathbf{R}):$$

1) при $a < 0$ решений не имеет;

2) при $a = 0$ равносильно уравнению $f(x) = 0$;

3) при $a > 0$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) \ge -a, \\ f(x) \le a; \end{cases}$

- неравенство

$$|f(x)| > a \quad (a \in \mathbf{R}):$$

1) при $a < 0$ имеет решение – множество всех x из ОДЗ выражения $f(x)$;

2) при $a = 0$ имеет решение – множество всех x из ОДЗ выражения $f(x)$ таких, что $f(x) \ne 0$;

3) при $a > 0$ равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x) < -a, \\ f(x) > a; \end{array}\right.$

• неравенство

$$|f(x)| \geq a \quad (a \in \mathbf{R}):$$

1) при $a \leq 0$ имеет решение – множество всех x из ОДЗ выражения $f(x)$;

2) при $a > 0$ равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x) \leq -a, \\ f(x) \geq a; \end{array}\right.$

• неравенства

$$|f(x)| > g(x), \quad |f(x)| < g(x)$$

решают методом промежутков.

Неравенства, содержащие несколько модулей, также можно решать методом промежутков;

• неравенство

$$a|f(x)| > b|g(x)| \quad (a, b > 0)$$

равносильно неравенству $a^2(f(x))^2 > b^2(g(x))^2$. Далее вычисляют квадраты выражений и решают полученное неравенство (если это рационально) или сводят его к неравенству

$$(af(x) - bg(x))(af(x) + bg(x)) > 0.$$

9. Неравенства с двумя переменными

$$F(x, y) > 0, \quad F(x, y) \geq 0, \quad F(x, y) < 0, \quad F(x, y) \leq 0,$$

где $F(x, y)$ – выражение с переменными x, y.

Решение неравенства с двумя переменными – пара чисел (x, y), при которых неравенство обращается в верное числовое неравенство.

Решить неравенство с двумя переменными – значит найти множество всех его решений или доказать, что оно не имеет решений.

Основным методом решения неравенств с двумя переменными является *графический метод*: на координатной плоскости строят соответствующую кривую $F(x, y) = 0$ и находят множество точек плоскости, соответствующих смыслу неравенства.

VI. ТРИГОНОМЕТРИЯ

1. Градусное и радианное измерение углов

$$1^\circ \text{ (градус)} = \frac{\pi}{180} \text{ рад (радиан)} \approx 0{,}017453 \text{ рад};$$

$$1' \text{ (минута)} = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ \approx 0{,}000291 \text{ рад};$$

$$1'' \text{ (секунда)} = \left(\frac{1}{60}\right)' \approx 0{,}000005 \text{ рад};$$

$$1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45'';$$

$$\alpha \text{ рад} = \frac{\pi \cdot n^\circ}{180^\circ}, \quad n^\circ = \frac{180^\circ \cdot \alpha}{\pi}.$$

2. Тригонометрические функции

Определение тригонометрических функций

Для единичной окружности и угла α:

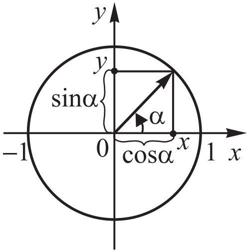
$$\sin\alpha = y, \quad \cos\alpha = x,$$

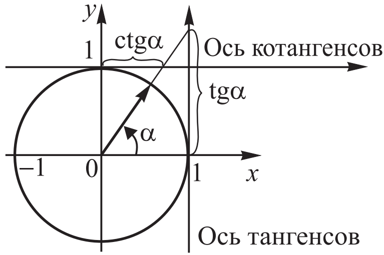
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}\right),$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad (\alpha \neq \pi n,\ n \in \mathbf{Z}),$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}\right),$$

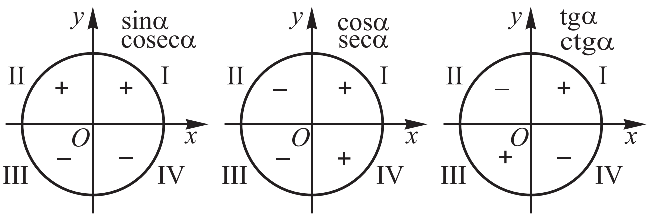
$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \quad (\alpha \neq \pi n,\ n \in \mathbf{Z}).$$





Свойства тригонометрических функций

Знаковая характеристика:



$$|\sin\alpha| \le 1, \quad |\cos\alpha| \le 1, \quad |\sin\alpha \pm \cos\alpha| \le \sqrt{2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha \in \mathbf{R}, \quad \operatorname{ctg}\alpha \in \mathbf{R}, \quad |\sec\alpha| \ge 1, \quad |\operatorname{cosec}\alpha| \ge 1.$$

Функции $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sec\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$ имеют период 2π:

$$\sin(\alpha+2\pi n)=\sin\alpha,\quad \cos(\alpha+2\pi n)=\cos\alpha,$$
$$\sec(\alpha+2\pi n)=\sec\alpha,\quad \operatorname{cosec}(\alpha+2\pi n)=\operatorname{cosec}\alpha,\quad n\in\mathbf{Z}.$$

Функции $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ имеют период π:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\pi n)=\operatorname{tg}\alpha,\quad \operatorname{ctg}(\alpha+\pi n)=\operatorname{ctg}\alpha,\quad n\in\mathbf{Z}.$$

Функции $\cos\alpha$ и $\sec\alpha$ – четные:

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha,\quad \sec(-\alpha)=\sec\alpha.$$

Функции $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{cosec}\alpha$ – нечетные:

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\quad \operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha,$$
$$\operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha,\quad \operatorname{cosec}(-\alpha)=-\operatorname{cosec}\alpha.$$

Значения тригонометрических функций приведены в таблице:

Угол α		Функция			
градус	радиан	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
0	0	0	1	0	–
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$

Продолжение табл.

Угол α		Функция			
градус	радиан	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	–	0
120	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
135	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
150	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
180	π	0	-1	0	–
210	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
225	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
240	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Окончание табл.

Угол α		Функция			
градус	радиан	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
270	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	–	0
300	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
315	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
330	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
360	2π	0	1	0	–

3. Приведение тригонометрических функций

Функции $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, $\sec\alpha$ и $\operatorname{cosec}\alpha$ называют *сходными* друг для друга.

Углы α и β называются *дополнительными*, если

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}.$$

Тригонометрическая функция одного из дополнительных углов равна сходной функции второго дополнительного угла.

П р а в и л о   п р и в е д е н и я:

1) если:

а) аргумент тригонометрической функции имеет вид $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ или $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, то функцию заменить на сходную аргумента α;

б) аргумент имеет вид $\pi\pm\alpha$ или $2\pi\pm\alpha$, то сохранить ту же функцию, но с аргументом α;

2) перед полученной функцией аргумента α поставить тот знак («+» или «–»), который имела заданная функция; при этом угол α считать острым.

Т а б л и ц а   п р и в е д е н и я:

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\pi-\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$\pi+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$2\pi-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$2\pi+\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$

4. Тригонометрические формулы

Основные тригонометрические тождества:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1 \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}\right),$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}\right),$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \quad (\alpha \neq \pi n,\ n \in \mathbf{Z}).$$

Формулы суммы и разности аргументов:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \quad \left(\alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}\right),$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \quad \left(\alpha, \beta, \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}\right),$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}\quad(\alpha,\beta,\alpha+\beta\neq\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z}),$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}\quad(\alpha,\beta,\alpha-\beta\neq\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z}).$$

Формулы двойного аргумента:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1,$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\quad\left(\alpha,2\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z}\right),$$

$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}\quad(\alpha,2\alpha\neq\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z}).$$

Формулы половинного аргумента:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\qquad\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\quad(\alpha\neq\pi+2\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z}),$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\quad(\alpha\neq2\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z})$$

(знак «+» или «–» перед корнем выбирается в зависимости от того, в какой четверти лежит угол $\frac{\alpha}{2}$),

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\quad(\alpha\neq\pi+2\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z}),$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\quad(\alpha\neq 2\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z}).$$

Формулы тройного аргумента:

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha,$$

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg}3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}\quad\left(\alpha,3\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z}\right),$$

$$\operatorname{ctg}3\alpha=\frac{3\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}^3\alpha}{1-3\operatorname{ctg}^2\alpha}\quad(\alpha,3\alpha\neq\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z}).$$

Формулы понижения степени:

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha),$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha),$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}\right),$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha} \quad (\alpha \neq \pi n,\ n \in \mathbf{Z}).$$

Формулы суммы и разности тригонометрических функций:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right),$$

$$\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right),$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \quad \left(\alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}\right),$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \quad \left(\alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}\right),$$

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} \quad (\alpha, \beta \neq \pi n,\ n \in \mathbf{Z}),$$

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta} \quad (\alpha, \beta \neq \pi n,\ n \in \mathbf{Z}),$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \beta \neq \pi n,\ k, n \in \mathbf{Z}\right),$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = -\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \beta \neq \pi n,\ k, n \in \mathbf{Z}\right),$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 2\operatorname{cosec}2\alpha \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}\right),$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = -2\operatorname{ctg}2\alpha \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}\right).$$

Формулы произведения тригонометрических функций:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)),$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)).$$

Формулы с универсальной подстановкой:

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \quad (\alpha \neq \pi + 2\pi n,\ \ n \in \mathbf{Z}),$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \quad (\alpha \neq \pi + 2\pi n,\ \ n \in \mathbf{Z}),$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \quad \left(\alpha, \frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \ n \in \mathbf{Z}\right),$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} \quad (\alpha \neq \pi n,\ \ n \in \mathbf{Z}).$$

5. Обратные тригонометрические функции

Определение и свойства обратных тригонометрических функций

Арксинус числа x (обозначается $\arcsin x$), где $x \in [-1, 1]$, – такой угол y, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, что $\sin y = x$.

С в о й с т в а ф у н к ц и и $\arcsin x$:

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad x \in [-1, 1],$$

$$\arcsin(\sin x) = x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x.$$

Арккосинус числа x (обозначается $\arccos x$), где $x \in [-1, 1]$, – такой угол y, $y \in [0, \pi]$, что $\cos y = x$.

С в о й с т в а ф у н к ц и и $\arccos x$:

$$\cos(\arccos x) = x, \quad x \in [-1, 1],$$

$$\arccos(\cos x) = x, \quad x \in [0, \pi],$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$

Арктангенс числа x (обозначается $\operatorname{arctg} x$), где $x \in \mathbf{R}$, – такой угол y, $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, что $\operatorname{tg} y = x$.

Свойства функции $\operatorname{arctg} x$:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \quad x \in \mathbf{R},$$
$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$
$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x.$$

Арккотангенс числа x (обозначается $\operatorname{arcctg} x$), где $x \in \mathbf{R}$, – такой угол y, $y \in (0, \pi)$, что $\operatorname{ctg} y = x$.

Свойства функции $\operatorname{arcctg} x$:

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, \quad x \in \mathbf{R},$$
$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x, \quad x \in (0, \pi),$$
$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x.$$

Формулы для обратных тригонометрических функций

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in [-1, 1],$$
$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in \mathbf{R},$$
$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1, 1],$$
$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad x \in \mathbf{R},$$

$$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbf{R},$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1, 1],$$

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbf{R},$$

$$\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbf{R},$$

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1),$$

$$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad x \in [-1, 1], \quad x \neq 0,$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0,$$

$$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad x \in [-1, 1], \quad x \neq 0,$$

$$\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1),$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0,$$

$$\arcsin x = \begin{cases} -\arccos\sqrt{1-x^2}, & \text{если } -1 \le x < 0, \\ \arccos\sqrt{1-x^2}, & \text{если } 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

$$\arcsin x = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1),$$

$$\arccos x = \begin{cases} \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2}, & \text{если } -1 \le x < 0, \\ \arcsin\sqrt{1-x^2}, & \text{если } 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

$$\arccos x = \begin{cases} \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{если } -1 \le x < 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{если } 0 < x \le 1, \end{cases}$$

$$\operatorname{arctg} x = \begin{cases} -\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если } x < 0, \\ \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если } x \ge 0, \end{cases}$$

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

6. Простейшие тригонометрические уравнения

Уравнение

$$\sin x = a \quad (a \in \mathbf{R})$$

при $|a| \le 1$ имеет решение

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n \quad (n \in \mathbf{Z}).$$

Частные случаи:

$\sin x = -1$ имеет решение $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \quad (n \in \mathbf{Z})$;

$\sin x = 0$ имеет решение $x = \pi n \quad (n \in \mathbf{Z})$;

$\sin x = 1$ имеет решение $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \quad (n \in \mathbf{Z})$.

Уравнение

$$\cos x = a \quad (a \in \mathbf{R})$$

при $|a| \le 1$ имеет решение

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n \quad (n \in \mathbf{Z}).$$

Частные случаи:

$\cos x = -1$ имеет решение $x = \pi + 2\pi n \quad (n \in \mathbf{Z})$;

$\cos x = 0$ имеет решение $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n \quad (n \in \mathbf{Z})$;

$\cos x = 1$ имеет решение $x = 2\pi n \quad (n \in \mathbf{Z})$.

Уравнение

$$\operatorname{tg} x = a \quad (a \in \mathbf{R})$$

имеет решение

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n \quad (n \in \mathbf{Z}).$$

Уравнение

$$\operatorname{ctg} x = a \quad (a \in \mathbf{R})$$

имеет решение

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n \quad (n \in \mathbf{Z}).$$

VII. ФУНКЦИИ

1. Понятие функции

Определение функции

Если каждому числу x ($x \in X \subseteq \mathbf{R}$) по некоторому правилу f ставится в соответствие единственное число y ($y \in Y \subseteq \mathbf{R}$), то говорят, что задана *функция* $y = f(x)$. Здесь x – *аргумент* (или *независимая переменная*), y – *значение функции* (или *зависимая переменная*).

Множество X – *область определения функции*; обозначается $D(f)$ или $D(y)$.

Множество всех значений y ($y \in Y,\ y = f(x)$) – *область значений функции*; обозначается $E(f)$ или $E(y)$.

График функции $y = f(x)$ – множество всех точек плоскости с координатами (x, y), где $x \in D(y)$; $y = f(x)$.

Функция может быть задана:

- аналитически (формулой);
- таблично;
- графически;
- описательно.

Основные характеристики функции

Функция $f(x)$ – *четная*, если:

1) $D(f)$ симметрична относительно $x = 0$;

2) для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство

$$f(-x) = f(x).$$

График четной функции симметричен относительно оси Oy.

Функция $f(x)$ – *нечетная*, если:

1) $D(f)$ симметрична относительно $x = 0$;

2) для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство

$$f(-x) = -f(x).$$

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Функция $f(x)$ – *периодическая*, если существует число T $(T \neq 0)$ такое, что для любого $x \in D(f)$:

1) $x \pm T \in D(f)$;

2) $f(x-T) = f(x+T) = f(x)$.

Число T – *период* функции $f(x)$. Числа nT $(n \in \mathbf{Z})$ также являются ее периодами.

Наименьший положительный период T функции $f(x)$ называется ее *главным периодом*.

Пусть x_1, x_2 – произвольные значения из области $X \subseteq D(f)$ функции $f(x)$, причем $x_1 < x_2$. Тогда на множестве X функция $f(x)$ называется:

- *возрастающей*, если $f(x_1) < f(x_2)$;
- *убывающей*, если $f(x_1) > f(x_2)$;
- *неубывающей*, если $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- *невозрастающей*, если $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Возрастающие, убывающие, неубывающие, невозрастающие функции называются *монотонными* (возрастающие и убывающие – *строго монотонными*).

Обратная и сложная функции

Обратной для функции $y = f(x)$ называется функция, которая определена на множестве $E(f)$ и каждому

$y \in E(f)$ ставит в соответствие единственное значение $x \in D(f)$ такое, что $f(x) = y$.

Если функция строго возрастает (убывает) на множестве X, то для нее существует обратная функция и она тоже строго возрастает (убывает) на множестве значений данной функции.

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

Если $y = f(u)$, $u = g(x)$, причем $E(g) \subseteq D(f)$, то функция $y = f(g(x))$ называется *сложной функцией* (или *функцией от функции*).

Явная, неявная и параметрически заданная функции

Явной называется функция, заданная аналитически в виде $y = f(x)$.

Неявной называется функция $y = f(x)$, заданная аналитически уравнением $F(x, y) = 0$ при условии, что $F(x, f(x)) = 0$, $x \in D(f)$.

Параметрически заданной функцией называется функция $y = f(x)$, заданная аналитически уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in T \subseteq \mathbf{R}.$$

2. Элементарные функции

Основные элементарные функции:
1) *степенная функция*

$$y = x^{\alpha} \quad (\alpha \in \mathbf{R});$$

2) *показательная функция*

$$y = a^{x} \quad (a > 0,\ a \neq 1);$$

3) *логарифмическая функция*

$$y = \log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1);$$

4) *тригонометрические функции*:

$$y = \sin x, \quad y = \cos x,$$
$$y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{ctg} x,$$
$$y = \sec x, \quad y = \operatorname{cosec} x;$$

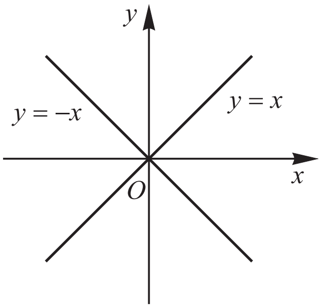
5) *обратные тригонометрические функции*:

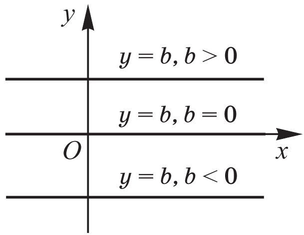
$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x,$$
$$y = \operatorname{arctg} x, \quad y = \operatorname{arcctg} x.$$

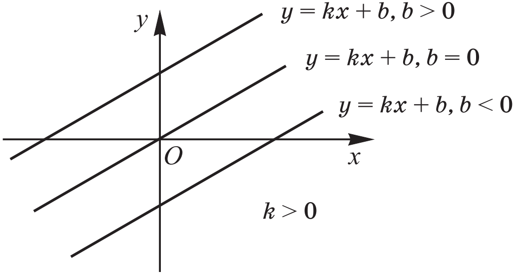
Элементарная функция – функция, которая получается из основных элементарных функций с помощью арифметических операций и путем образования сложной функции.

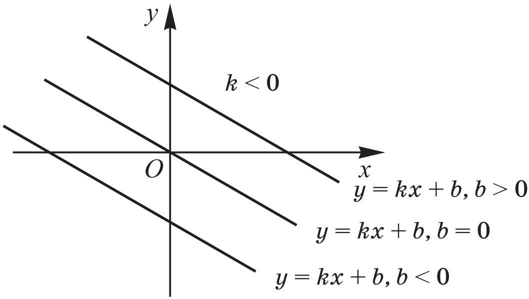
3. Графики элементарных функций

Линейная функция $y = ax + b \quad (a, b \in \mathbf{R})$:

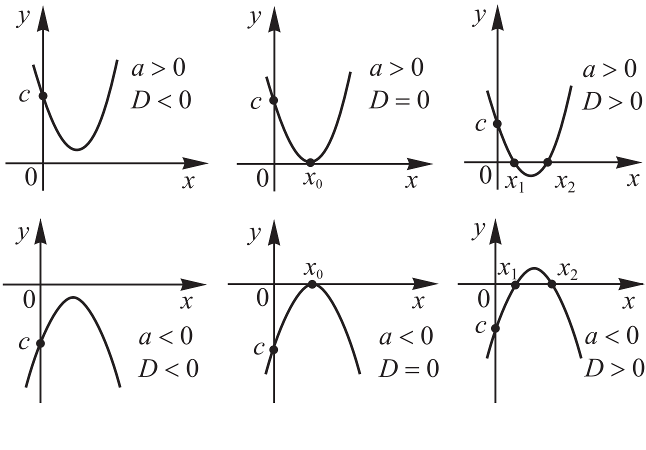




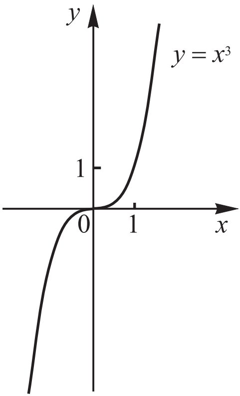


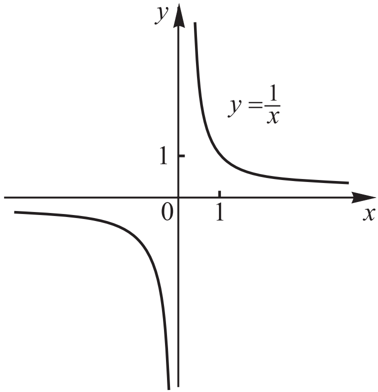


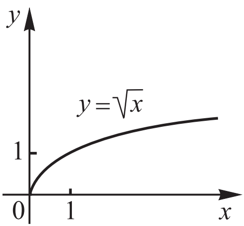
Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0)$:

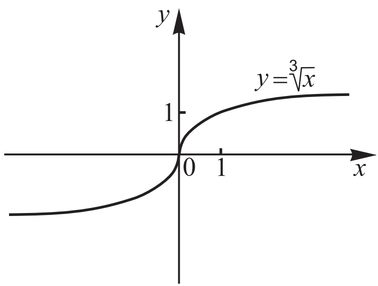


Степенная функция $y = x^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbf{R})$:

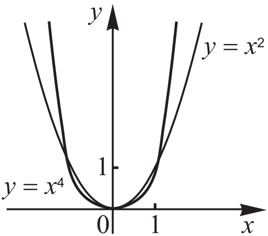




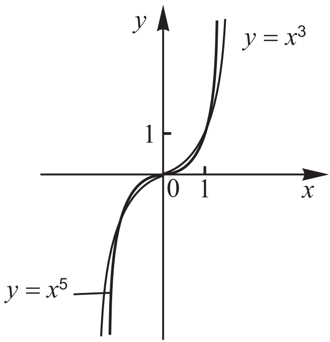




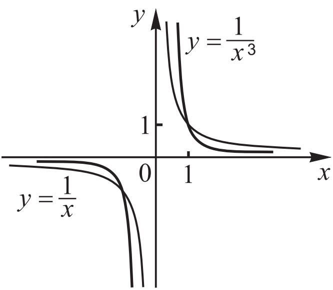
$$y = x^{2n} \quad (n \in \mathbf{N})$$



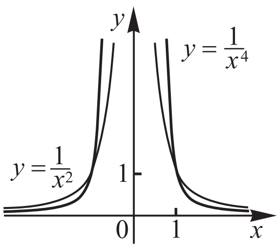
$$y = x^{2n+1} \quad (n \in \mathbf{N})$$



$$y = \frac{1}{x^{2n-1}} \quad (n \in \mathbf{N})$$

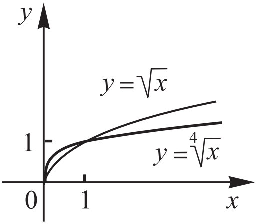


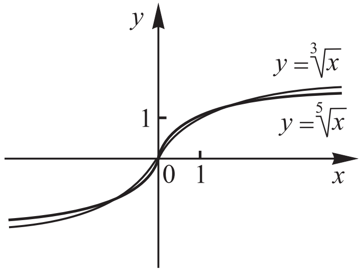
$$y = \frac{1}{x^{2n}} \quad (n \in \mathbf{N})$$



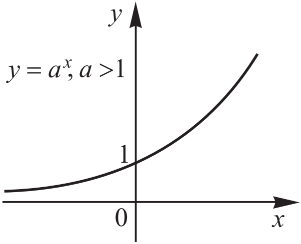
$y = x^{\frac{1}{2n}} \quad (n \in \mathbf{N})$

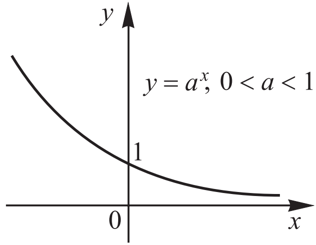
$y = x^{\frac{1}{2n+1}} \quad (n \in \mathbf{N})$



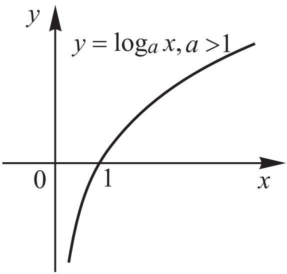


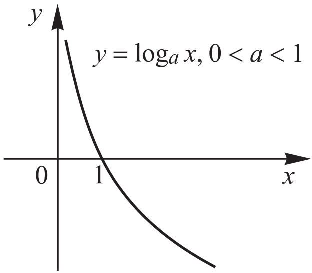
Показательная функция $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$:





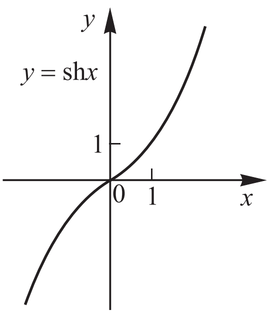
Логарифмическая функция $y = \log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$:

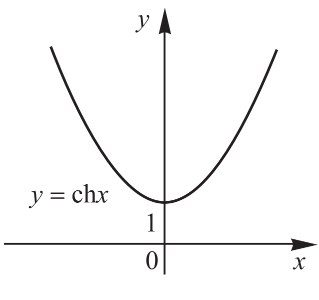


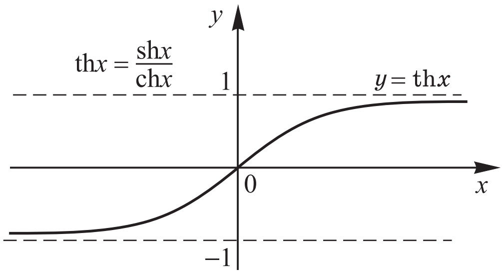


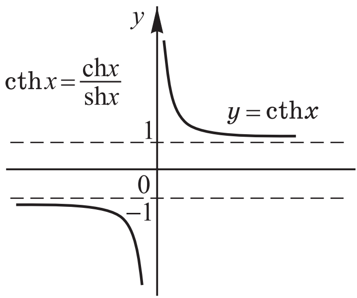
Гиперболические функции:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

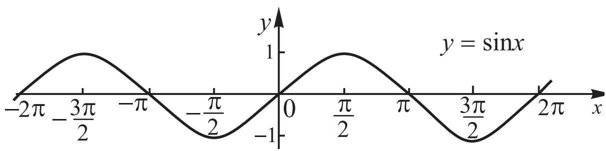


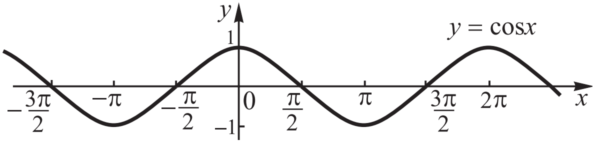


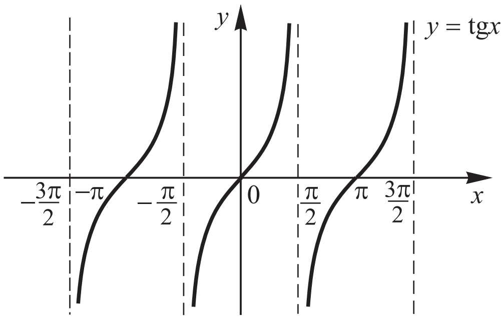


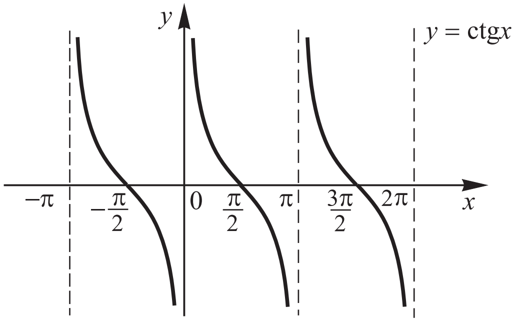


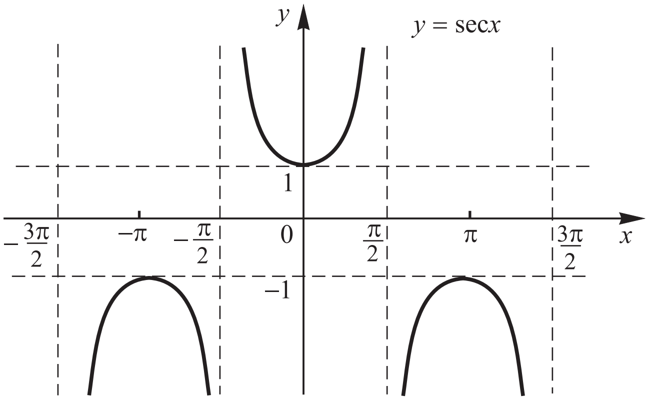
Тригонометрические функции:

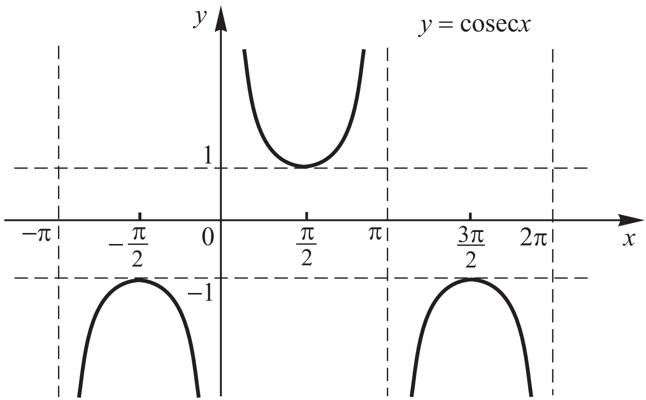



y = cos x
y
x
1
−1
0

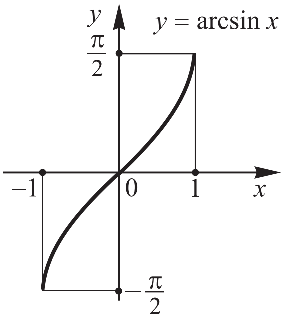

y = tg x
y
x
0

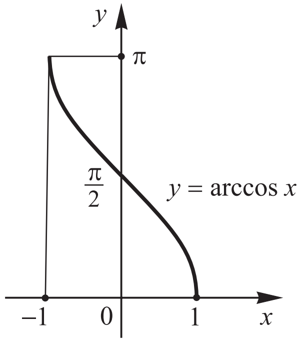

y = ctg x
y
x
0

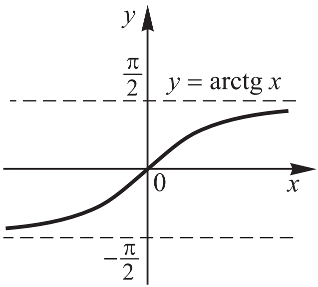

y
y = secx
1
−1
0
x
−3π/2
−π
−π/2
π/2
π
3π/2

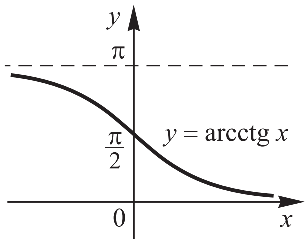

y
y = cosecx
1
−1
0
x
−π
−π/2
π/2
π
3π/2
2π

Обратные тригонометрические функции:





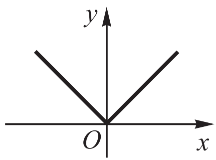




4. Графики некоторых неэлементарных функций

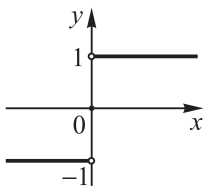
Функция *модуль*:

$$y = |x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geq 0, \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$



Функция *сигнум*:

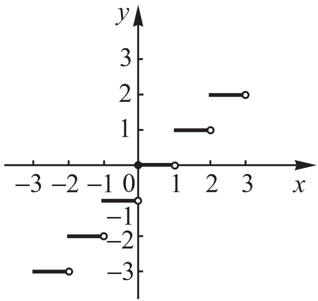
$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, \text{ если } x < 0, \\ 0, \text{ если } x = 0, \\ 1, \text{ если } x > 0. \end{cases}$$



Функция *антье* (или целая часть числа)

$$y = [x],$$

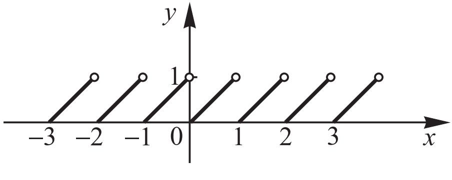
где $[x]$ – наибольшее целое число, не превосходящее x.



Функция

$$y = \{x\},$$

где $\{x\} = x - [x]$ – дробная часть числа x:



5. Преобразование графиков функций

График функции $y = -f(x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно оси Ox.

График функции $y = f(-x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно оси Oy.

График функции $y = f(x) + b$ получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy на $|b|$ вверх при $b > 0$ и вниз при $b < 0$.

График функции $y = f(x + a)$ получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox на $|a|$ вправо при $a < 0$ и влево при $a > 0$.

График функции $y = kf(x)$ $(k > 0)$ получается «растяжением» графика функции $y = f(x)$ от оси Ox в k раз при $k > 1$ и «сжатием» к оси Ox в $\frac{1}{k}$ раз при $0 < k < 1$.

График функции $y = f(mx)$ $(m > 0)$ получается «сжатием» графика функции $y = f(x)$ к оси Oy в m раз при $m > 1$ и «растяжением» от оси Oy в $\frac{1}{m}$ раз при $0 < m < 1$.

При построении графика функции $y = |f(x)|$ части графика функции $y = f(x)$, лежащие выше оси Ox и на оси Ox, остаются без изменения, а части, лежащие ниже оси Ox, симметрично отражаются относительно этой оси.

При построении графика функции $y = f(|x|)$ часть графика функции $y = f(x)$, лежащая левее оси Oy, отбрасывается, а часть, лежащая правее оси Oy и на оси Oy, остается без изменения и дополняется симметричной ей частью относительно оси Oy.

VIII. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1. Понятие числовой последовательности

Определение числовой последовательности

Числовой последовательностью называется функция $x_n = f(n)$, определенная на множестве **N** натуральных чисел. Она обозначается (x_n) или $\{x_n\}$.

x_n – *n-й член последовательности*;

$x_n = f(n)$ – *формула общего члена последовательности.*

Способы задания последовательности

Последовательность может быть задана:

• аналитически (формулой общего члена);

• рекуррентно (указывают несколько первых членов и правило, позволяющее найти все последующие члены, используя предыдущие);

- геометрически (точками на числовой оси);
- графически (точками на координатной плоскости);
- словесно;
- таблично.

Виды последовательностей

Пусть $n \in \mathbf{N}$, тогда последовательность (x_n) называется:

- *возрастающей*, если $x_n < x_{n+1}$;
- *убывающей*, если $x_n > x_{n+1}$;
- *неубывающей*, если $x_n \le x_{n+1}$;
- *невозрастающей*, если $x_n \ge x_{n+1}$.

Возрастающие, убывающие, неубывающие, невозрастающие последовательности называются *монотонными* (возрастающие и убывающие – *строго монотонными*).

Последовательность (x_n) *ограничена сверху*, если существует $M \in \mathbf{R}$ такое, что $x_n \le M$ для всех $n \in \mathbf{N}$.

Последовательность (x_n) *ограничена снизу*, если существует $m \in \mathbf{R}$ такое, что $x_n \ge m$ для всех $n \in \mathbf{N}$.

Последовательность (x_n) называется *ограниченной*, если она ограничена сверху и снизу.

2. Прогрессии

Арифметическая прогрессия

Арифметическая прогрессия – числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом d.

d – разность арифметической прогрессии.

Числовая последовательность $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ является арифметической прогрессией, если

$$a_{n+1} = a_n + d \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Если $d > 0$, то прогрессия *возрастающая*, если $d < 0$, то прогрессия *убывающая*.

Если a_n $(n \in \mathbf{N})$ – общий член арифметической прогрессии, S_n – сумма n первых ее членов, то:

$$a_n = a_1 + d(n-1),$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad (n \geq 2),$$

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2} \quad (n \geq 2, \quad k \in \mathbf{N}, \quad k < n),$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, \quad S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n.$$

Если имеется n последовательных членов арифметической прогрессии (a_n), то

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots .$$

Геометрическая прогрессия

Геометрическая прогрессия – числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число q, не равное нулю.

q – знаменатель геометрической прогрессии.

Числовая последовательность $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ является геометрической прогрессией, если

$$b_1 \neq 0, \quad b_{n+1} = b_n q \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Если $q > 1$, то прогрессия *возрастающая* (по модулю); если $0 < q < 1$, то прогрессия *убывающая* (по модулю); если $q < 0$, то прогрессия *знакочередующаяся*.

Если b_n $(n \in \mathbf{N})$ – общий член геометрической прогрессии, S_n – сумма n первых ее членов, то:

$$b_n = b_1 q^{n-1}, \quad |b_n| = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}} \quad (n \geq 2),$$

$$\left|b_n\right| = \sqrt{b_{n-k}b_{n+k}} \quad (n \geq 2, \quad k \in \mathbf{N}, \quad k < n),$$

$$S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1-q}, \quad S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} \quad (q \neq 1).$$

Если имеется n последовательных членов геометрической прогрессии (b_n), то

$$b_1 b_n = b_2 b_{n-1} = b_3 b_{n-2} = \ldots .$$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия – геометрическая прогрессия, у которой $\left|q\right| < 1$.

Сумма S всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

IX. ПЛАНИМЕТРИЯ

1. Прямые на плоскости

На плоскости две различные прямые могут пересекаться или быть параллельными.

Пересекающиеся прямые – прямые, имеющие единственную общую точку.

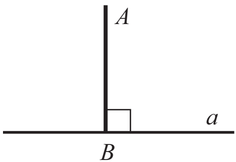
Параллельные прямые a, b – прямые, которые лежат в одной плоскости и не пересекаются; пишут: $a \parallel b$.

Перпендикулярные прямые a, b – прямые, при пересечении которых образуется прямой угол; пишут: $a \perp b$.

Пусть a, b, c – прямые на плоскости, тогда:

- если $a \parallel b$ и $b \parallel c$, то $a \parallel c$;
- если $a \perp b$ и $c \perp b$, то $a \parallel c$;
- если $a \parallel b$ и $c \perp a$, то $c \perp b$.

Перпендикуляр к данной прямой – это отрезок прямой, перпендикулярной к данной, одним из концов которого является точка пересечения этих прямых.

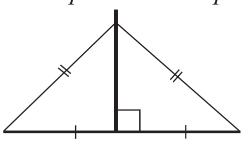


$$AB \perp a,$$

B – основание перпендикуляра.

Через любую точку плоскости можно провести единственный перпендикуляр к данной прямой.

Серединный перпендикуляр к отрезку – это перпендикуляр к данному отрезку с основанием в середине отрезка.



Точка лежит на серединном перпендикуляре к отрезку тогда и только тогда, когда она равноудалена от концов отрезка.

Расстояние между двумя точками – длина отрезка, соединяющего эти точки.

Расстояние от точки до прямой – длина перпендикуляра, проведенного из этой точки на прямую.

Расстояние между параллельными прямыми – расстояние от произвольной точки одной из параллельных прямых до другой прямой.

2. Углы на плоскости

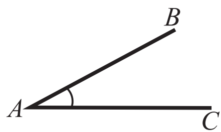
Угол – геометрическая фигура, состоящая из двух лучей, выходящих из одной точки.

Углом (или плоским углом) называют также часть плоскости, ограниченную двумя лучами, выходящими из одной точки.

$\angle BAC$ (или $\angle A$):

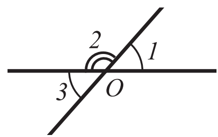
A – вершина;

AB, *AC – стороны*.



Величина угла – его градусная или радианная мера.

$\angle 1$ и $\angle 2$ – *смежные углы*,
$\angle 1$ и $\angle 3$ – *вертикальные углы*.
Сумма смежных углов равна $180°$.
Вертикальные углы равны.



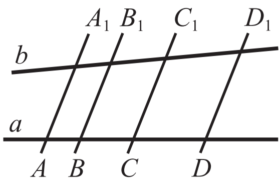
Развернутый угол – это угол, градусная мера которого 180°.

Прямой угол – угол, равный смежному с ним углу; его градусная мера 90°.

Острый угол меньше прямого, *тупой угол* больше прямого, но меньше развернутого угла.

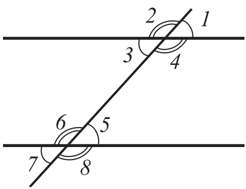
Биссектриса угла – луч с началом в вершине угла, делящий угол на два равных угла.

3. Параллельность прямых



Т е о р е м а Ф а л е с а. Параллельные прямые, пересекающие две данные прямые, отсекают на этих прямых пропорциональные отрезки:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD}.$$



Углы, образованные при пересечении двух прямых третьей:

$\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 7$, $\angle 4$ и $\angle 8$ – пары *соответственных углов*;

$\angle 1$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 7$ – пары *внешних односторонних углов*;

$\angle 4$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 6$ – пары *внутренних односторонних углов*;

$\angle 3$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 6$ – пары *внутренних накрест лежащих углов*;

$\angle 1$ и $\angle 7$, $\angle 2$ и $\angle 8$ – пары *внешних накрест лежащих углов*.

Две прямые, пересеченные третьей прямой, параллельны тогда и только тогда, когда:

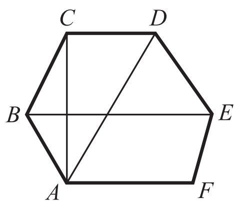
- внутренние накрест лежащие углы равны;
- соответственные углы равны;
- сумма внутренних односторонних углов равна $180°$.

4. Многоугольник

Многоугольник – замкнутая ломаная.

Многоугольником (или плоским многоугольником) называют также ограниченную часть плоскости вместе с границей, которая является замкнутой ломаной.

Шестиугольник $ABCDEF$:



A, B, C, D, E, F – *вершины*,

AB, BC, CD, DE, EF, FA – *стороны*,

AC, AD, BE и т.д. – *диагонали*.

Выпуклый многоугольник – многоугольник, который лежит в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей любую его сторону.

Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$.

Число диагоналей у выпуклого n-угольника равно

$$\frac{1}{2}n(n-3).$$

Периметр многоугольника – сумма длин его сторон.

Равные многоугольники – многоугольники, у которых все соответствующие стороны равны и все соответствующие углы равны.

Равновеликие многоугольники – многоугольники с равными площадями.

Подобные многоугольники – многоугольники, у которых соответствующие стороны пропорциональны, а соответствующие углы равны.

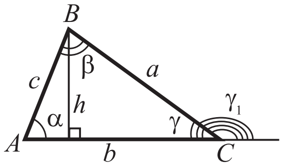
Окружность называется *вписанной в многоугольник*, если все его стороны касаются окружности, а многоугольник называется *описанным около окружности*.

Окружность называется *описанной около многоугольника*, если все его вершины лежат на окружности, а многоугольник называется *вписанным в окружность*.

Если речь идет о плоском многоугольнике, то аналогично определяются описанный и вписанный круги.

5. Треугольник

Основные понятия



Треугольник – многоугольник с тремя сторонами.

$$\alpha+\beta+\gamma=180°,$$

$$\gamma_1=\alpha+\beta,$$

где γ_1 – внешний угол треугольника.

В произвольном треугольнике против большей стороны лежит больший угол, против большего угла – бóльшая сторона.

Неравенство треугольника. Любая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон и больше модуля их разности:

$$|b-c|<a<b+c, \quad |a-c|<b<a+c, \quad |a-b|<c<a+b.$$

Теоремы косинусов и синусов

Теорема косинусов:

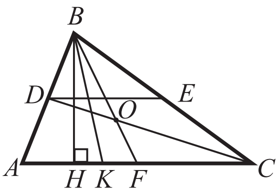
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma.$$

Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

где R – радиус описанной окружности.

Линии в треугольнике



DE – средняя линия,
BF, CD – медианы,
BK – биссектриса,
BH – высота.

Средняя линия – отрезок прямой, соединяющий середины двух сторон треугольника.

$$DE \parallel AC, \quad DE = \frac{1}{2}AC.$$

Медиана – отрезок прямой, соединяющий середину стороны треугольника с противоположной ей вершиной.

Все три медианы пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2:1$, считая от вершины:

$$OF = \frac{1}{3}BF, \quad OD = \frac{1}{3}CD.$$

Каждая из медиан треугольника делит его на два равновеликих треугольника.

Длина медианы, проведенной к стороне b,

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}.$$

Длина стороны a треугольника

$$a = \frac{2}{3}\sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2},$$

где m_a, m_b, m_c – медианы, проведенные к сторонам a, b, c соответственно.

Биссектриса треугольника – отрезок биссектрисы внутреннего угла треугольника от его вершины до точки пересечения с противолежащей стороной.

Все три биссектрисы пересекаются в одной точке.

Биссектриса делит сторону треугольника на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника:

$$\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{BC}.$$

Длина биссектрисы, проведенной к стороне b,

$$l_b = \frac{\sqrt{ac(a+b+c)(a+c-b)}}{a+c}.$$

Центр вписанной в треугольник окружности находится в точке пересечения его биссектрис.

Высота треугольника – отрезок перпендикуляра, проведенного из вершины треугольника на противоположную сторону или ее продолжение.

Все три высоты пересекаются в одной точке.

Высоты треугольника относятся, как обратные длины сторон, к которым они соответственно проведены:

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

Длина высоты, проведенной к стороне b,

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ – *полупериметр треугольника*.

Серединный перпендикуляр треугольника – это серединный перпендикуляр стороны треугольника.

Центр описанной около треугольника окружности находится в точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам этого треугольника.

Решение треугольников

К элементам треугольника относят его стороны, углы, биссектрисы, медианы, высоты, радиусы вписанной и описанной окружностей.

Решить треугольник – значит найти неизвестные его элементы по трем известным.

Важнейшие случаи решения треугольников:

• если даны сторона треугольника и прилежащие к ней углы, то сначала находят третий угол, а затем по теореме синусов – неизвестные стороны;

• если даны две стороны треугольника и угол между ними, то сначала по теореме косинусов находят третью сторону, а затем по теореме косинусов или синусов – неизвестные углы;

• если даны три стороны треугольника, то один из углов находят по теореме косинусов, а другие – по теореме косинусов или синусов;

• если даны две стороны a, b треугольника и угол α, противолежащий стороне a, то задача нахождения стороны и остальных углов решается неоднозначно (возможны два решения). Из равенства $\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha$ находят (по теореме синусов) два угла β – острый и тупой. Далее находят по два различных значения остальных элементов.

Признаки равенства и подобия треугольников

Треугольники равны, если:

• две стороны и угол между ними одного треугольника равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника;

• сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны стороне и двум прилежащим углам другого треугольника;

• три стороны одного треугольника равны трем сторонам другого треугольника.

Треугольники подобны, если:

• два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника;

• две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, образованные этими сторонами, равны;

• три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника.

Площадь треугольника

$$S = \frac{1}{2}bh, \quad S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma, \quad S = \frac{abc}{4R}, \quad S = pr,$$

где r, R – радиусы соответственно вписанной и описанной окружностей.

Ф о р м у л а Г е р о н а:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

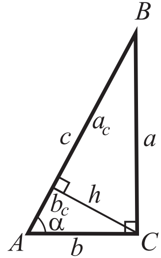
где p – полупериметр треугольника.

6. Прямоугольный треугольник

Прямоугольный треугольник – треугольник, у которого есть прямой угол.

AB – гипотенуза,

AC, *BC – катеты*.



Теорема Пифагора:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Справедливы соотношения:

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha, \quad \frac{b}{c} = \cos\alpha,$$

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha, \quad \frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

Медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.

Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, делит этот треугольник на два треугольника, подобных исходному.

Если из вершины прямого угла проведена высота, то:

$$\frac{a}{c} = \frac{a_c}{a} \quad \text{или} \quad \frac{b}{c} = \frac{b_c}{b},$$

$$\frac{h}{a_c} = \frac{b_c}{h}, \qquad \frac{a_c}{b_c} = \frac{a^2}{b^2},$$

$$\frac{a}{c} = \frac{h}{b} \text{ или } \frac{b}{c} = \frac{h}{a}.$$

Если r, R – радиусы соответственно вписанной и описанной окружностей, то:

$$r = \frac{1}{2}(a + b - c), \quad r = p - c, \quad R = \frac{c}{2},$$

где p – полупериметр треугольника.

Прямоугольные треугольники равны, если:

- катеты одного треугольника равны катетам другого треугольника;
- катет и острый угол одного треугольника соответственно равны катету и острому углу другого треугольника;
- гипотенуза и острый угол одного треугольника равны гипотенузе и острому углу другого треугольника;
- гипотенуза и катет одного треугольника равны гипотенузе и катету другого треугольника.

Прямоугольные треугольники подобны, если:

- острый угол одного треугольника равен острому углу другого треугольника;
- катеты одного треугольника пропорциональны катетам другого треугольника;
- гипотенуза и катет одного треугольника пропорциональны гипотенузе и катету другого треугольника.

Площадь прямоугольного треугольника:

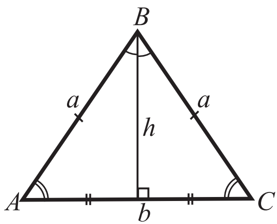
$$S = \frac{1}{2}ab, \quad S = \frac{1}{2}ch.$$

7. Равнобедренный треугольник

Равнобедренный треугольник – треугольник, у которого две стороны равны.

AB, BC – боковые стороны,

AC – основание.



Треугольник является равнобедренным тогда и только тогда, когда углы при основании равны.

Высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является также медианой и биссектрисой.

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - b^2}.$$

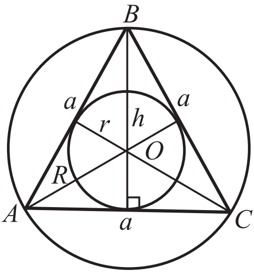
Высоты (а также медианы и биссектрисы), проведенные к боковым сторонам равнобедренного треугольника, равны.

Площадь равнобедренного треугольника

$$S = \frac{1}{2}bh.$$

8. Равносторонний треугольник

Равносторонний (или *правильный*) *треугольник* – треугольник, у которого все стороны равны.



$$\angle BAC = \angle ABC = \angle ACB = 60°.$$

Любая высота равностороннего треугольника является также медианой и биссектрисой, и все они равны между собой:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Все равносторонние треугольники подобны.

Центр вписанной и описанной окружностей находится в точке пересечения медиан, высот и биссектрис треугольника.

Если r, R – радиусы соответственно вписанной и описанной окружностей, то:

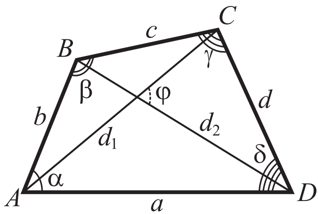
$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \quad r = \frac{h}{3}, \quad R = 2r, \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad R = \frac{2}{3}h.$$

Площадь равностороннего треугольника

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

9. Четырехугольник

Четырехугольник – многоугольник с четырьмя сторонами.



AB и CD, AD и BC – *противолежащие стороны*,

$\angle BAD$ и $\angle BCD$, $\angle ABC$ и $\angle ADC$ – *противолежащие углы*,

A и C, B и D – *противолежащие вершины*.

Сумма внутренних углов выпуклого четырехугольника:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°.$$

Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда $\alpha + \gamma = 180°$ и $\beta + \delta = 180°$.

В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда $a + c = b + d$.

Площадь четырехугольника

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi.$$

Если четырехугольник можно вписать в окружность, то

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где $p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$ – *полупериметр четырехугольника.*

Если в четырехугольник можно вписать окружность радиусом r, то

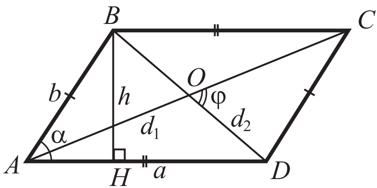
$$S = pr.$$

Классификация четырехугольников:

10. Параллелограмм

Параллелограмм – четырехугольник, противолежащие стороны которого параллельны.

BH – высота,
AC, BD – диагонали.



$$AB \parallel CD, \quad AB = CD, \quad AD \parallel BC, \quad AD = BC,$$
$$\angle BAD = \angle BCD, \quad \angle ABC = \angle ADC,$$
$$\angle BAD + \angle ADC = 180°,$$
$$AO = OC, \quad BO = OD,$$
$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Признаки параллелограмма:

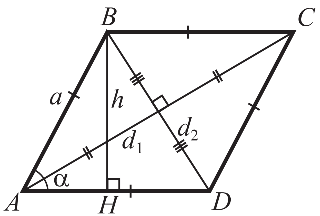
- если в четырехугольнике две противолежащие стороны равны и параллельны, то это параллелограмм;
- если в четырехугольнике противолежащие стороны попарно равны, то это параллелограмм;
- если в четырехугольнике противолежащие углы равны, то это параллелограмм;
- если в четырехугольнике диагонали, пересекаясь, делятся пополам, то это параллелограмм.

Площадь параллелограмма:

$$S = ah, \quad S = ab\sin\alpha, \quad S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi.$$

11. Ромб

Ромб – параллелограмм, все стороны которого равны.



$$AB \parallel CD, \quad AD \parallel BC,$$
$$AB = BC = CD = AD,$$
$$AC \perp BD, \quad d_1^2 + d_2^2 = 4a^2.$$

Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.

В ромб можно вписать окружность радиуса $r = \frac{1}{2}a\sin\alpha$, $r = \frac{h}{2}$.

Признаки ромба:

- если в параллелограмме диагонали взаимно перпендикулярны, то это ромб;
- если диагональ параллелограмма лежит на биссектрисе его угла, то это ромб;
- если стороны четырехугольника равны, то это ромб.

Площадь ромба:

$$S = ah, \quad S = a^2 \sin\alpha, \quad S = \frac{1}{2} d_1 d_2.$$

12. Прямоугольник

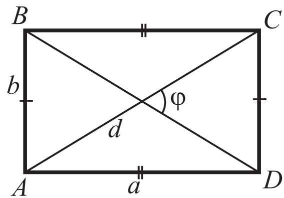
Прямоугольник – параллелограмм, у которого все углы прямые.

$$AB = CD, \quad AD = BC,$$

$$AB \parallel CD, \quad AD \parallel BC,$$

$$\angle BAD = \angle ABC = \angle BCD = \\ = \angle ADC = 90^\circ,$$

$$AC = BD, \quad d = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



Около прямоугольника можно описать окружность радиусом $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$, $R = \frac{d}{2}$.

Признаки прямоугольника:

• если в параллелограмме диагонали равны, то это прямоугольник;

• если в параллелограмме один угол прямой, то это прямоугольник;

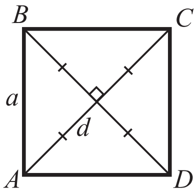
• если в четырехугольнике три угла прямые, то это прямоугольник.

Площадь прямоугольника:

$$S = ab, \quad S = \frac{d^2}{2}\sin\varphi.$$

13. Квадрат

Квадрат – прямоугольник, все стороны которого равны.



$$AB = BC = CD = AD,$$

$$\angle BAD = \angle ABC = \angle BCD =$$
$$= \angle ADC = 90^\circ,$$

$$AC \perp BD, \quad d = \sqrt{2}a.$$

Около квадрата можно описать окружность радиуса $R = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, $R = \frac{d}{2}$.

В квадрат можно вписать окружность радиуса $r = \frac{a}{2}$.

Признаки квадрата:

• если стороны четырехугольника и его диагонали равны, то это квадрат;

• если в параллелограмме диагонали взаимно перпендикулярны и равны, то это квадрат;

• если у ромба один угол прямой, то это квадрат;

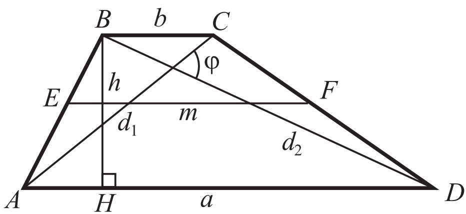
• если у прямоугольника диагонали пересекаются под прямым углом, то это квадрат.

Площадь квадрата:

$$S = a^2, \quad S = \frac{1}{2}d^2, \quad S = 4r^2, \quad S = 2R^2.$$

14. Трапеция

Трапеция – четырехугольник, две противоположные стороны которого параллельны, а две другие не параллельны.



AD, BC – основания,

AB, CD – боковые стороны,

BH – высота,

EF – средняя линия.

$$AD \parallel BC, \quad AB \nparallel CD.$$

Во всякой трапеции ее средняя линия параллельна основаниям и равна их полусумме:

$$m = \frac{a+b}{2}.$$

Равнобедренная (или *равнобочная*, или *равнобокая*) *трапеция* – трапеция, боковые стороны которой равны.

В равнобедренной трапеции $d_1 = d_2$ и углы при основании равны.

Если в равнобедренную трапецию можно вписать окружность, то

$$h^2 = AD \cdot BC.$$

Площадь S равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны,

$$S = h^2.$$

Прямоугольная трапеция – трапеция, у которой есть прямой угол.

Площадь трапеции:

$$S = \frac{a+b}{2}h, \quad S = mh, \quad S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi.$$

15. Правильные многоугольники

Правильный многоугольник – выпуклый многоугольник, у которого все стороны и все углы равны.

К правильным многоугольникам относятся равносторонний треугольник, квадрат, правильный пятиугольник и другие фигуры.

Одноименные правильные многоугольники подобны.

Центр правильного многоугольника – это совпадающие центры вписанной в него и описанной около него окружностей.

Если a – сторона правильного n-угольника, r, R – радиусы соответственно вписанной и описанной окружностей, то:

$$a = 2r\,\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}, \quad a = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}.$$

Площадь правильного n-угольника:

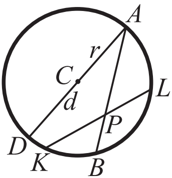
$$S = \frac{1}{2}nR^2\sin\frac{360^\circ}{n}, \quad S = pr,$$

где p – *полупериметр многоугольника*.

16. Окружность и круг

Окружность

Окружность – множество всех точек плоскости, равноудаленных от заданной точки плоскости.



C – центр окружности,
AC – радиус (r),
AD – диаметр (d),
AB, KL – хорды.

$$d = 2r.$$

При пересечении двух хорд попарные произведения их отрезков равны:

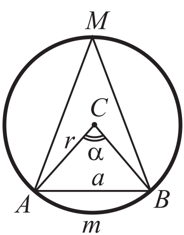
$$AP \cdot PB = KP \cdot PL.$$

Диаметр окружности, перпендикулярный к хорде, делит эту хорду пополам.

Хорды равны тогда и только тогда, когда они равноудалены от центра окружности.

Длина окружности:

$$L = 2\pi r, \quad L = \pi d.$$



Дуга окружности – часть окружности, заключенная между двумя ее фиксированными точками.

$\smile{AB}$ (или $\smile{AmB}$) – дуга окружности,
$\angle ACB$ – *центральный угол*,
$\angle AMB$ – *вписанный угол*.

Величина дуги окружности – градусная или радианная мера соответствующего центрального угла.

Дуги равны тогда и только тогда, когда они стягиваются равными хордами.

$$\angle AMB = \frac{1}{2}\angle ACB, \quad \angle AMB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AmB}.$$

Длина дуги окружности величиной $\alpha°$

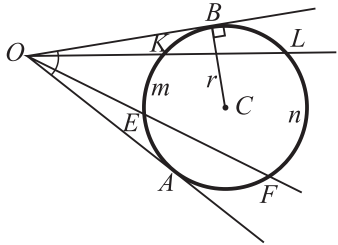
$$l = \frac{\pi r \alpha}{180}.$$

Длина хорды

$$a = 2r\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Касательная к окружности – прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку.

Секущая – прямая, имеющая с окружностью две общие точки.



OA, OB – касательные,

A, B – точки касания,

OF, OL – секущие,

$\angle AOB$ – *описанный угол.*

$$BC \perp OB, \quad OA = OB,$$

$$OA^2 = OF \cdot OE, \quad OF \cdot OE = OL \cdot OK,$$

$$\angle AOB = \frac{1}{2}(\smile AnB - \smile AmB).$$

Круг

Круг – ограниченная часть плоскости вместе с границей, которой является окружность.

Центр круга – центр ограничивающей его окружности.

Радиус круга – радиус ограничивающей его окружности.

Сектор – часть круга, ограниченная дугой и двумя радиусами.

Сегмент – часть круга, ограниченная дугой и стягивающей ее хордой.

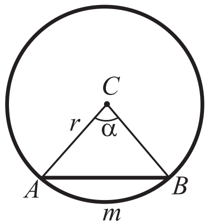
Площадь круга:

$$S = \pi r^2, \quad S = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Площадь сектора, ограниченного дугой величиной $\alpha°$,

$$S = \frac{\pi r^2 \alpha}{360}.$$

Площадь сегмента с дугой $\overset{\frown}{AmB}$ величиной $\alpha°$ находится как разность площади сектора ACB и площади треугольника ACB.



Если $\alpha° < 180°$, то

$$S = \frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha°\right).$$

17. Уравнения прямой и окружности

Уравнение прямой:

$$ax + by + c = 0,$$

где $a, b, c \in \mathbf{R}$.

Если $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ – прямые, то они:

- пересекаются при условии $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$;
- параллельны при $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$;
- совпадают при $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Прямые взаимно перпендикулярны, если

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$$

Уравнение окружности радиусом R с центром в точке (a, b) имеет вид

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

В частности, уравнение

$$x^2 + y^2 = R^2$$

является уравнением окружности радиусом R с центром в точке $O(0, 0)$.

X. СТЕРЕОМЕТРИЯ

1. Прямая и плоскость в пространстве

Основные понятия

В пространстве прямая однозначно задается:
- двумя точками;
- двумя пересекающимися плоскостями.

Плоскость однозначно задается:
- двумя пересекающимися прямыми;

- двумя параллельными прямыми;
- прямой и не лежащей на ней точкой;
- тремя точками, не лежащими на одной прямой.

Две прямые в пространстве называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Две прямые называются *скрещивающимися*, если не существует плоскости, в которой они обе лежат.

Прямая и плоскость называются *параллельными*, если они не имеют общих точек.

Две плоскости называются *параллельными*, если они не имеют общих точек.

Две прямые называются *перпендикулярными*, если они образуют прямой угол.

Прямая, пересекающая плоскость, называется *перпендикулярной к плоскости* (плоскость называется *перпендикулярной к данной прямой*), если данная прямая перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости. В противном случае прямая, пересекающая плоскость, называется *наклонной*.

Расстояние от точки до плоскости – длина перпендикуляра, проведенного из этой точки на данную плоскость.

Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью – расстояние от произвольной точки прямой до этой плоскости.

Расстояние между параллельными плоскостями – расстояние от произвольной точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости.

Расстояние между скрещивающимися прямыми – расстояние от одной из скрещивающихся прямых до плоскости, проходящей через другую прямую и параллельной первой прямой.

Взаимное расположение прямой и плоскости

Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны между собой.

Если прямая, не принадлежащая данной плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то данные прямые скрещиваются.

Если прямая перпендикулярна к каждой из двух пересекающихся прямых, лежащих в плоскости, то она перпендикулярна и к самой плоскости.

Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

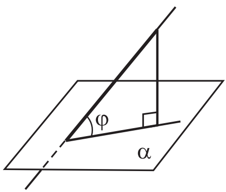
Пусть a, b – прямые, β, γ, δ – плоскости, тогда:

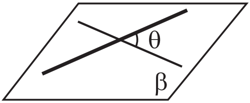
- если $\beta \parallel \gamma$ и $\gamma \parallel \delta$, то $\beta \parallel \delta$;
- если $a \perp \beta$ и $b \perp \beta$, то $a \parallel b$;
- если $a \perp \beta$ и $a \perp \gamma$, то $\beta \parallel \gamma$;
- если $a \parallel b$ и $a \perp \beta$, то $b \perp \beta$;
- если $\beta \parallel \gamma$ и $a \perp \beta$, то $a \perp \gamma$.

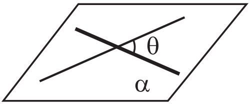
Теорема о трех перпендикулярах. Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна к наклонной тогда и только тогда, когда эта прямая перпендикулярна к проекции наклонной.

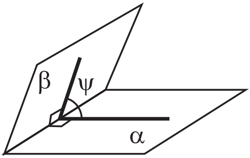
2. Углы в пространстве

Угол между прямой и плоскостью – угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.









Угол между скрещивающимися прямыми – угол между пересекающимися прямыми, параллельными соответственно данным скрещивающимся прямым.

Двугранный угол – фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей ограничивающей их прямой. Полуплоскости называются *гранями*, прямая – *ребром двугранного угла*.

Линейный угол двугранного угла – угол, образованный двумя лучами, которые выходят из одной точки, лежащей на ребре двугранного угла, и проведены на обеих гранях перпендикулярно к ребру.

Величина двугранного угла – это градусная или радианная мера его линейного угла.

Две плоскости называются *перпендикулярными*, если при пересечении они образуют прямые двугранные углы.

3. Многогранник

Многогранник – геометрическое тело, ограниченное конечным числом плоских многоугольников, из которых любые два смежных не лежат в одной плоскости; эти многоугольники называются *гранями*, их стороны – *ребрами*, а вершины – *вершинами многогранника*.

Выпуклый многогранник – многогранник, который лежит по одну сторону от плоскости, содержащей любую его грань.

Диагональ многогранника – отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани.

Шар называется *вписанным в многогранник*, если все грани многогранника касаются шара, а многогранник называется *описанным около шара*.

Шар называется *описанным около многогранника*, если все вершины многогранника лежат на шаре, а многогранник называется *вписанным в шар*.

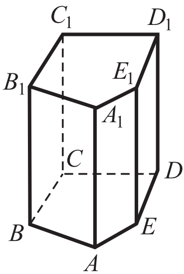
Формула Эйлера:

$$N - L + F = 2,$$

где N, L, F – количество вершин данного многогранника, его ребер и граней соответственно.

4. Призма

Призма – многогранник, две грани которого – n-угольники, а остальные n граней – параллелограммы.



Пятиугольная призма:

$ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ – *основания*,

AA_1B_1B, BB_1C_1C и т.д. – *боковые грани*,

AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1 – *боковые ребра*.

Высота – перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки плоскости одного основания к плоскости другого.

Если боковые ребра перпендикулярны к основаниям, то призма называется *прямой*, в противном случае – *наклонной*.

Правильная призма – прямая призма, в основаниях которой правильные многоугольники.

Перпендикулярное сечение – сечение призмы плоскостью, перпендикулярной к боковому ребру призмы.

Для произвольной призмы:

$$S_{\text{бок}} = Pl, \quad S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}},$$

$$V = S_{\text{осн}}H, \quad V = Ql,$$

где $S_{\text{бок}}$ – площадь боковой поверхности; P – периметр перпендикулярного сечения; l – длина бокового ребра; $S_{\text{полн}}$ – площадь полной поверхности; $S_{\text{осн}}$ – площадь основания; V – объем; H – высота; Q – площадь перпендикулярного сечения.

Для прямой призмы:

$$S_{\text{бок}} = pl, \quad V = S_{\text{осн}} H,$$

где p – периметр основания.

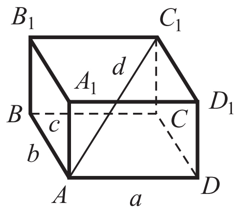
5. Параллелепипед

Параллелепипед – призма, основаниями которой являются параллелограммы.

Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

Если боковые ребра перпендикулярны к основаниям, то параллелепипед называется *прямым*, в противном случае – *наклонным*.

Прямоугольный параллелепипед – прямой параллелепипед, основаниями которого являются прямоугольники.



Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

Для прямоугольного параллелепипеда:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, \quad S_{\text{полн}} = 2(ab + bc + ac), \quad V = abc,$$

где $S_{\text{полн}}$ – площадь полной поверхности; V – объем.

Куб – прямоугольный параллелепипед, все ребра которого равны.

Для куба:

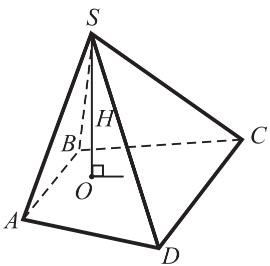
$$d = a\sqrt{3}, \quad H = a, \quad r = \frac{a}{2}, \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$S_{\text{полн}} = 6a^2, \quad V = a^3,$$

где H – высота; r, R – радиусы соответственно вписанного и описанного шаров.

6. Пирамида

Пирамида – многогранник, одна из граней которого – многоугольник, а остальные грани – треугольники с общей вершиной.



Четырехугольная пирамида:

ABCD – основание,

ASB, *BSC* и т.д. – *боковые грани,*

AS, *BS* и т.д. – *боковые ребра,*

S – вершина,

OS – высота.

Для произвольной пирамиды:

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}},$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H,$$

где $S_{\text{полн}}$ – площадь полной поверхности; $S_{\text{бок}}$ – площадь боковой поверхности; $S_{\text{осн}}$ – площадь основания; V – объем.

Если у пирамиды все двугранные углы при основании равны, то вершина пирамиды проецируется в центр окружности, вписанной в основание.

Если у пирамиды боковые ребра равны (или наклонены к основанию под одним и тем же углом), то вершина пирамиды проецируется в центр окружности, описанной около основания.

Правильная пирамида – пирамида, основанием которой является правильный многоугольник и все боковые ребра равны между собой.

Апофема – высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины.

Для правильной пирамиды

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} ph,$$

где p – периметр основания; h – апофема.

Тетраэдр – треугольная пирамида, все ребра которой равны.

Для тетраэдра:

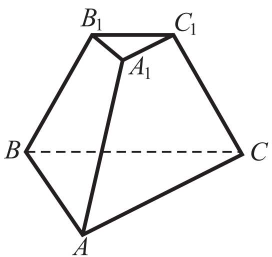
$$H = \frac{a\sqrt{6}}{3}, \quad r = \frac{a\sqrt{6}}{12}, \quad R = \frac{a\sqrt{6}}{4},$$

$$S_{\text{полн}} = a^2\sqrt{3}, \quad V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12},$$

где a – ребро; r, R, – радиусы соответственно вписанного и описанного шаров.

7. Усеченная пирамида

Усеченная пирамида – часть пирамиды, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию.



Треугольная усеченная пирамида:

ABC, $A_1B_1C_1$ – *основания*,

AA_1B_1B, BB_1C_1C и т.д. – *боковые грани*,

AA_1, BB_1 и т.д. – *боковые ребра*.

Высота – перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки плоскости одного основания к плоскости другого.

Для усеченной пирамиды:

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_1 + S_2,$$

$$V = \frac{1}{3} H(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2),$$

где $S_{\text{полн}}$ – площадь полной поверхности; $S_{\text{бок}}$ – площадь боковой поверхности; S_1, S_2 – площади оснований; V – объем; H – высота.

Правильная усеченная пирамида – часть правильной пирамиды, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию.

Апофема – высота боковой грани правильной усеченной пирамиды.

Для правильной усеченной пирамиды

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)h,$$

где p_1, p_2 – периметры оснований; h – апофема.

8. Правильные многогранники

Правильный многогранник – многогранник, все грани которого являются равными правильными многоугольниками и в каждой вершине сходится одно и то же количество граней.

Выпуклые правильные многогранники:

- *тетраэдр* (правильный четырехгранник);
- *гексаэдр*, или куб (правильный шестигранник);
- *октаэдр* (правильный восьмигранник);
- *додекаэдр* (правильный двенадцатигранник);
- *икосаэдр* (правильный двадцатигранник).

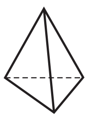
Других выпуклых правильных многогранников не существует.

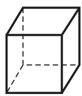
Пусть a – ребро многогранника, N – количество вершин, L – количество ребер, F – количество граней, S – площадь поверхности, V – объем, R – радиус описанного шара, r – радиус вписанного шара. Тогда:

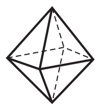
Параметр	Многогранник				
	Тетраэдр	Гексаэдр	Октаэдр	Додекаэдр	Икосаэдр
N	4	8	6	20	12
L	6	12	12	30	30
F	4	6	8	12	20
S	$a^2\sqrt{3}$	$6a^2$	$2a^2\sqrt{3}$	$3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$5a^2\sqrt{3}$

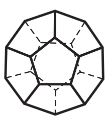
Окончание табл.

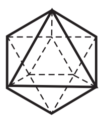
Параметр	Многогранник				
	Тетраэдр	Гексаэдр	Октаэдр	Додекаэдр	Икосаэдр
V	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$	a^3	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$	$\frac{a^3(15+7\sqrt{5})}{4}$	$\frac{5a^3(3+\sqrt{5})}{12}$
R	$\frac{a\sqrt{6}}{4}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{4}$	$\frac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$
r	$\frac{a\sqrt{6}}{12}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a\sqrt{6}}{6}$	$\frac{a\sqrt{250+110\sqrt{5}}}{20}$	$\frac{a\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12}$


Тетраэдр

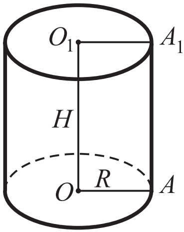

Гексаэдр


Октаэдр


Додекаэдр


Икосаэдр

9. Цилиндр



Прямой круговой цилиндр (или просто *цилиндр*) – геометрическое тело, ограниченное поверхностью, которая получена при вращении прямоугольника вокруг оси, содержащей одну из его сторон.

OO_1 – *высота*,
AA_1 – *образующая*.

Основания – два круга, ограничивающих цилиндр.
Для цилиндра:

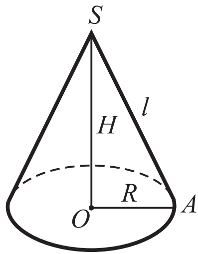
$$S_{\text{осн}} = \pi R^2, \quad S_{\text{бок}} = 2\pi RH,$$

$$S_{\text{полн}} = 2\pi RH + 2\pi R^2, \quad V = \pi R^2 H,$$

где $S_{\text{осн}}$ – площадь основания; $S_{\text{бок}}$ – площадь боковой поверхности; $S_{\text{полн}}$ – площадь полной поверхности; V – объем.

10. Конус

Прямой круговой конус (или просто *конус*) – геометрическое тело, ограниченное поверхностью, которая получена при вращении прямоугольного треугольника вокруг оси, содержащей один из его катетов.



S – вершина,
OS – высота,
AS – образующая.

Основание – круг, ограничивающий конус.

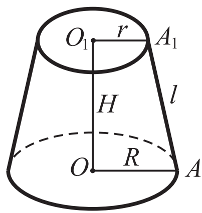
Для конуса:

$$S_{\text{осн}} = \pi R^2, \quad S_{\text{бок}} = \pi R l,$$

$$S_{\text{полн}} = \pi R l + \pi R^2, \quad V = \frac{1}{3}\pi R^2 H,$$

где $S_{\text{осн}}$ – площадь основания; $S_{\text{бок}}$ – площадь боковой поверхности; $S_{\text{полн}}$ – площадь полной поверхности; V – объем.

11. Усеченный конус



Усеченный конус – часть конуса, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию.

OO_1 – высота,
AA_1 – образующая.

Основания – два круга, ограничивающих усеченный конус.

Для усеченного конуса:

$$S_{\text{бок}} = \pi(R+r)l,$$

$$S_{\text{полн}} = \pi(R+r)l + \pi R^2 + \pi r^2,$$

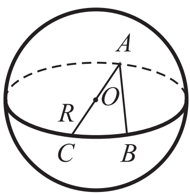
$$V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2),$$

где $S_{\text{бок}}$ – площадь боковой поверхности; $S_{\text{полн}}$ – площадь полной поверхности; V – объем.

12. Сфера и шар

Сфера – множество всех точек пространства, равноудаленных от заданной точки, называемой *центром сферы*.

Шар – ограниченная часть пространства вместе с границей, которой является сфера.



O – центр сферы (*шара*),
OC – радиус,
AC – диаметр,
AB – хорда.

Касательная плоскость к сфере (*шару*) – плоскость, имеющая со сферой (шаром) единственную общую точку.

Плоскость является касательной к сфере (шару) тогда и только тогда, когда она перпендикулярна к радиусу сферы (шара), проведенному в точку касания.

Площадь сферы

$$S = 4\pi R^2,$$

где R – радиус сферы (шара).

Объем шара

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Шаровой сегмент – часть шара, отсекаемая от него плоскостью.

Сферический сегмент – поверхность сферической части шарового сегмента.

Для шарового сегмента:

$$S = 2\pi Rh, \quad S_{\text{полн}} = 2\pi Rh + \pi r^2,$$

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right),$$

где S – площадь сферического сегмента; h – высота; $S_{\text{полн}}$ – площадь полной поверхности; r – радиус основания; V – объем.

Шаровой слой – часть шара, заключенная между двумя параллельными секущими плоскостями.

Сферический пояс – поверхность сферической части шарового слоя.

Для шарового слоя:

$$S_1 = \pi R_1^2, \quad S_2 = \pi R_2^2,$$

$$S = 2\pi Rh, \quad S_{\text{полн}} = 2\pi Rh + \pi R_1^2 + \pi R_2^2,$$

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi h(R_1^2 + R_2^2),$$

где S_1, S_2 – площади оснований; R_1, R_2 – радиусы оснований; S – площадь сферического пояса; h – высота; $S_{\text{полн}}$ – площадь полной поверхности; V – объем.

Шаровой сектор – геометрическое тело, полученное при вращении кругового сектора (с углом меньше 90°) вокруг оси, содержащей один из боковых радиусов.

Для шарового сектора:

$$S_{\text{полн}} = \pi R(2h + \sqrt{2Rh - h^2}), \quad V = \frac{2}{3}\pi R^2 h,$$

где $S_{\text{полн}}$ – площадь полной поверхности; h – высота шарового сегмента; V – объем.

13. Комбинация геометрических тел

Шар можно вписать:

- в призму, если призма прямая и ее высота равна диаметру круга, вписанного в основание призмы;
- в пирамиду, если в ее основание можно вписать круг, а высота пирамиды проходит через центр этого круга;
- в любой правильный многогранник;
- в цилиндр тогда и только тогда, когда высота цилиндра равняется диаметру его основания;
- в любой конус;
- в усеченный конус тогда и только тогда, когда образующая усеченного конуса равняется сумме радиусов оснований.

Шар можно описать:

- около призмы тогда и только тогда, когда призма прямая и около основания можно описать круг;
- около пирамиды тогда и только тогда, когда около основания можно описать круг;
- около любого правильного многогранника;
- около любого цилиндра, конуса, а также усеченного конуса.

Цилиндр можно:

- описать около призмы тогда и только тогда, когда призма прямая и около ее основания можно описать круг;

• вписать в призму тогда и только тогда, когда призма прямая и в ее основание можно вписать круг.

Конус можно:

• описать около пирамиды тогда и только тогда, когда боковые ребра пирамиды равны;

• вписать в пирамиду тогда и только тогда, когда в основание пирамиды можно вписать круг, а высота пирамиды проходит через центр этого круга.

XI. ВЕКТОРЫ

1. Понятие вектора

Вектор – направленный отрезок.

Вектор с началом A и концом B обозначают $\overline{AB}$ (или $\overrightarrow{AB}$); векторы обозначают также $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, … (или $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, …).

Длина (или *модуль*) *вектора* – расстояние между его началом и концом. Модули векторов $\overline{AB}$ и $\overline{a}$ обозначают $\left|\overline{AB}\right|$ и $\left|\overline{a}\right|$ соответственно.

Нулевой вектор (обозначается $\overline{0}$) – вектор нулевой длины, *единичный* – вектор длины 1.

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются *коллинеарными* (обозначаются $\overline{a} \parallel \overline{b}$), если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ имеют одинаковое направление, то их называют *сонаправленными* (обозначаются $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$), а если противоположное – *противоположно направленными* (обозначаются $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$).

Компланарные векторы – векторы, параллельные одной плоскости.

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются *равными*, если $|\overline{a}| = |\overline{b}|$ и $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$.

Угол между векторами $\overline{a}$, $\overline{b}$ (обозначается $(\widehat{\overline{a}, \overline{b}})$) – наименьший угол между направлениями векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, $0 \le (\widehat{\overline{a}, \overline{b}}) \le \pi$.

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются *перпендикулярными* (обозначаются $\overline{a} \perp \overline{b}$), если $(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}) = \dfrac{\pi}{2}$.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ с общим началом называется *правой*, если кратчайший поворот от вектора $\overline{a}$ к вектору $\overline{b}$ наблюдается с конца вектора $\overline{c}$ в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки. В противном случае тройка векторов называется *левой*.

2. Операции над векторами

Линейные операции над векторами

Линейные операции над векторами – произведение вектора на число и сумма векторов.

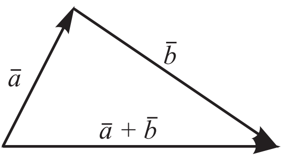
Произведение вектора $\overline{a}$ *на число* λ $(\lambda \in \mathbf{R})$ – вектор, обозначаемый $\lambda\overline{a}$, такой, что:

1) $\left|\lambda\overline{a}\right| = \left|\lambda\right| \left|\overline{a}\right|$;

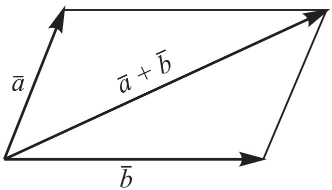
2) $\lambda\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{a}$ при $\lambda > 0$,
$\lambda\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{a}$ при $\lambda < 0$,
$\lambda\overline{a} = \overline{0}$ при $\lambda = 0$ или $\overline{a} = \overline{0}$.

Вектор $-\overline{a}$ называется *противоположным* вектору $\overline{a}$.

Сумму двух векторов на плоскости находят согласно правилу треугольника и правилу параллелограмма.

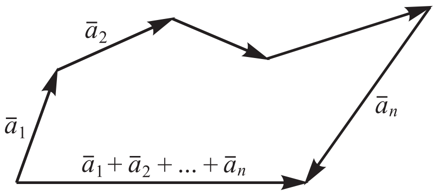


Правило треугольника



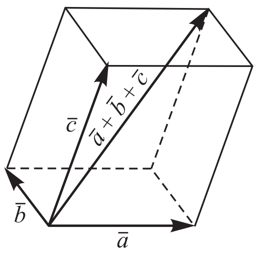
Правило параллелограмма

Сумму n векторов, $n \geq 2$, находят по правилу ломаной.



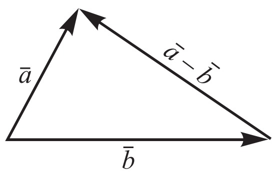
Правило ломаной

Для сложения трех векторов в пространстве справедливо также правило параллелепипеда.



Правило параллелепипеда

Разностью векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{a} - \overline{b} = \overline{a} + (-\overline{b})$.



Свойства линейных операций над векторами

Если $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – векторы, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, то:

$$\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a},$$

$$\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c},$$

$$\overline{a}+\overline{0}=\overline{a},$$

$$\overline{a}+(-\overline{a})=\overline{0},$$

$$\lambda(\mu\overline{a})=(\lambda\mu)\overline{a},$$

$$(\lambda+\mu)\overline{a}=\lambda\overline{a}+\mu\overline{a},$$

$$\lambda(\overline{a}+\overline{b})=\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b},$$

$$1\cdot\overline{a}=\overline{a},$$

$$0\cdot\overline{a}=\lambda\cdot\overline{0}=\overline{0}.$$

Скалярное произведение

Скалярным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (обозначается $(\overline{a}, \overline{b})$, или $\overline{a}\cdot\overline{b}$, или $\overline{a}\overline{b}$) называется число

$$(\overline{a}, \overline{b})=|\overline{a}|\,|\overline{b}|\cos(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}).$$

Ненулевые векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $(\overline{a}, \overline{b})=0$.

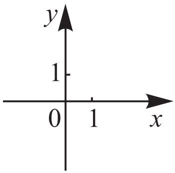
3. Прямоугольная декартова система координат на плоскости

Основные понятия

Прямоугольная декартова система координат на плоскости (обозначается Oxy) – совокупность фиксированной точки O и двух единичных ортогональных векторов $\{\overline{i}, \overline{j}\}$.

$\overline{i} = (1, 0)$ – первый вектор,

$\overline{j} = (0, 1)$ – второй вектор.



O – начало координат,
Ox – ось абсцисс,
Oy – ось ординат,
xOy – координатная плоскость.

x, y – координаты вектора $\overline{a}$ тогда и только тогда, когда

$$\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j}.$$

Координатная форма операций над векторами на плоскости

В прямоугольной декартовой системе координат на плоскости вектору соответствует упорядоченная пара действительных чисел – *координаты вектора*.

Если $\overline{a} = (x_1, y_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2)$, то:

$$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2},$$

$$\lambda\overline{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1) \ \ (\lambda \in \mathbf{R}),$$

$$\overline{a} + \overline{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$\overline{a} - \overline{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2),$$

$$(\overline{a}, \overline{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2,$$

$$\cos(\overline{a} \hat{,} \overline{b}) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

$\overline{a} \parallel \overline{b}$ тогда и только тогда, когда $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2}$.

Если $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, то:

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1),$$

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Если отрезок AB делится точкой C в отношении λ (т.е. $\overline{AC} = \lambda\overline{CB}$), где $\lambda \neq -1$, то точка C имеет координаты:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

В частности, при $\lambda = 1$ точка C – середина отрезка и

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

4. Прямоугольная декартова система координат в пространстве

Основные понятия

Прямоугольная декартова система координат в пространстве (обозначается $Oxyz$) – совокупность фиксированной точки O и правой тройки единичных попарно ортогональных векторов $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$.

$$\overline{i} = (1, 0, 0), \qquad \overline{j} = (0, 1, 0), \qquad \overline{k} = (0, 0, 1).$$

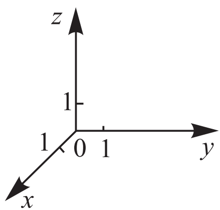
O – начало координат,

Ox – ось абсцисс,

Oy – ось ординат,

Oz – ось аппликат,

xOy, yOz, zOx – координатные плоскости.



x, y, z – координаты вектора $\overline{a}$ тогда и только тогда, когда

$$\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}.$$

Координатная форма операций над векторами в пространстве

В прямоугольной декартовой системе координат в пространстве вектору соответствует упорядоченная тройка действительных чисел – *координаты вектора*.

Если $\overline{a}=(x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b}=(x_2, y_2, z_2)$, то:

$$|\overline{a}|=\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2},$$

$$\lambda\overline{a}=(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) \quad (\lambda\in\mathbf{R}),$$

$$\overline{a}+\overline{b}=(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2),$$

$$\overline{a}-\overline{b}=(x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2),$$

$$(\overline{a},\overline{b})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2,$$

$$\cos(\overline{a}\,\widehat{,}\,\overline{b})=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

$\overline{a}\parallel\overline{b}$ тогда и только тогда, когда $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$.

Если $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то:

$$\overline{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1),$$

$$|\overline{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Если отрезок AB делится точкой C в отношении λ (т.е. $\overline{AC} = \lambda \overline{CB}$), где $\lambda \neq -1$, то точка C имеет координаты:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

В частности, при $\lambda = 1$ точка C – середина отрезка и

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

XII. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ФУНКЦИИ

1. Предел числовой последовательности

Понятие предела последовательности

Число a называется *пределом последовательности* (x_n), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $n(\varepsilon)$, что для всех $n \geq n(\varepsilon)$ выполняется условие $|x_n - a| < \varepsilon$. Пишут:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, а последовательность, не имеющая предела, – *расходящейся*.

В случае существования предела все члены последовательности с номерами $n \geq n(\varepsilon)$ содержатся внутри интервала $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Последовательность (x_n) называется *бесконечно малой*, если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Свойства сходящихся последовательностей

Если последовательность имеет предел, то он единственный.

Если последовательности (x_n) и (y_n) сходятся, то:

$$\lim_{n\to\infty} c_x = c\lim_{n\to\infty} x_n \quad (c = \text{const}),$$

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} \left(\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0\right).$$

Виды неопределенностей:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ 1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0}.$$

Для вычисления предела последовательности необходимо устранить неопределенность тождественным преобразованием выражения под знаком предела.

2. Предел функции в точке

Понятие предела функции в точке

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой этой точки (т.е. в проколотой окрестности точки x_0). Тогда число A называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0 (или при $x \to x_0$), если для любой последовательности (x_n), сходящейся к x_0 $(x_n \neq x_0)$, последовательность $f(x_n)$ соответствующих значений функции сходится к A.

В случае существования предела пишут:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

или

$$f(x) \to A \text{ при } x \to x_0.$$

Свойства функций, имеющих предел

Если функция имеет предел в точке, то он единственный.

Если существуют $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, то:

$$\lim_{x\to x_0} cf(x) = c\lim_{x\to x_0} f(x) \quad (c = \text{const}),$$

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} \left(\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0\right).$$

Замечательные пределы

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{или} \quad \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

где $e = 2{,}718281828459045...$ – иррациональное число.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \quad (a = \text{const}),$$

в частности $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1;$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \quad (a=\text{const}),$$

в частности $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1;$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha \quad (\alpha=\text{const}).$$

XIII. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

1. Понятие производной

Определение производной

Пусть функция $f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности. Тогда:

$\Delta x = x - x_0$ – приращение аргумента x в точке x_0,

$\Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ – приращение функции $f(x)$ в точке x_0.

Производной функции $f(x)$ *в точке* x_0 называется предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$$

или

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

если он существует.

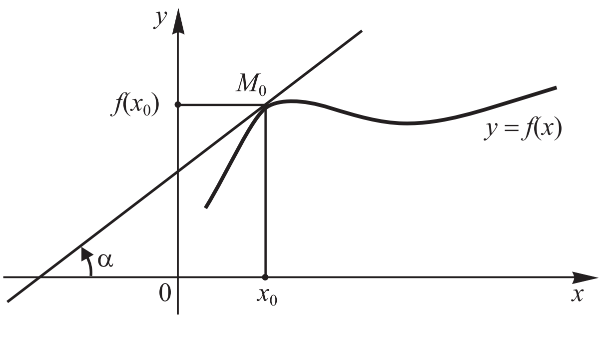
Производную обозначают также $\frac{df(x_0)}{dx}$, $f'_x(x_0)$.

Отыскание производной называется *дифференцированием функции*.

Функция, имеющая производную в точке, называется *дифференцируемой в этой точке*.

Функция, дифференцируемая в каждой точке некоторого промежутка, называется *дифференцируемой на промежутке*.

Геометрический смысл производной



$f'(x_0)$ – угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$:

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha.$$

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Уравнение нормали (перпендикуляра) к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$:

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0) \quad (f'(x_0) \neq 0).$$

Физический смысл производной

Если t – время прямолинейного движения материальной точки, $s(t)$ – путь, пройденный за время t, то:

$v(t) = s'(t)$ – скорость движения точки;

$a(t) = v'(t)$ – ускорение движения точки.

2. Правила дифференцирования

Основные формулы

Если $u = u(x)$, $v = v(x)$ – дифференцируемые функции, то:

$$(cu)' = cu' \quad (c = \text{const}),$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v',$$

$$(uv)' = u'v + uv',$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

Если $f_k = f_k(x)$ $(k = 1, 2, ..., n)$ – дифференцируемые функции, то

$$(f_1 f_2 f_3 \cdot ... \cdot f_{n-1} f_n)' = f_1' f_2 f_3 \cdot ... \cdot f_{n-1} f_n +$$
$$+ f_1 f_2' f_3 \cdot ... \cdot f_{n-1} f_n + ... + f_1 f_2 f_3 \cdot ... \cdot f_{n-1} f_n'.$$

Дифференцирование сложной функции

Если $y = f(g(x))$ – сложная функция, где $y = f(u)$, $u = g(x)$ – дифференцируемые функции, то

$$y_x' = f_u' g_x'.$$

Таблица производных

$(c)' = 0 \quad (c = \text{const});$

$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha = \text{const})$, в частности:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$$

$(a^x)' = a^x \ln a \quad (a = \text{const},\ a > 0)$, в частности

$$(e^x)' = e^x;$$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a} \quad (a = \text{const},\ a > 0,\ a \neq 1)$, в частности

$$(\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$(\sin x)' = \cos x;$ $\qquad (\cos x)' = -\sin x;$

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x};$ $\qquad (\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x};$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$ $\qquad (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2};$ $\qquad (\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2};$

$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$ $\qquad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$

$(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$ $\qquad (\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$

ФИЗИКА

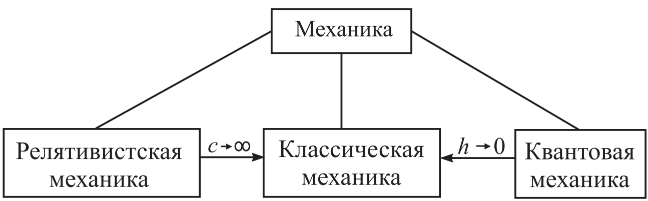
XIV. МЕХАНИКА

1. Предмет механики

Механика – раздел физики, изучающий механическое движение.

Механическое движение – изменение взаимного расположения тел или их частей в пространстве с течением времени.

Механика состоит из трех частей: классическая механика, релятивистская механика, квантовая механика.



(c – скорость света в вакууме, h – постоянная Планка)

Классическая механика изучает движение макротел массой больше некоторой символической массы $m_{\mathrm{P}} = \sqrt{\dfrac{hc}{G}}$, называемой *массой Планка* (G – гравитационная постоянная), которые движутся со скоростями $v \ll c$.

Основная задача классической механики – определение положения тел и их скоростей в любой момент времени.

Основные модели тел в классической механике:

- *материальная точка* (или *частица*) – тело, размерами, формой и внутренней структурой которого в условиях данной задачи можно пренебречь;
- *абсолютно твердое тело* – тело, изменениями формы и объема которого в условиях данной задачи можно пренебречь.

Механическая система – совокупность взаимодействующих тел, выбранных для рассмотрения.

Число степеней свободы механической системы – количество независимых координат, определяющих ее положение в пространстве.

Свободная материальная точка имеет три степени свободы, свободное твердое тело – шесть.

2. Кинематика

Кинематика – раздел механики, в котором рассматривается механическое движение тел без учета их массы и причин движения.

Система отсчета

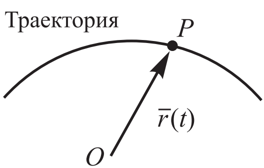
Тело отсчета – твердое тело, условно принимаемое за неподвижное, относительно которого рассматривается движение других тел.

Начало отсчета – точка на теле отсчета, относительно которой определяется положение других тел.

Система отсчета – тело отсчета и связанные с ним система координат и прибор для измерения времени.

Траектория – воображаемая линия, которую описывает какая-либо точка движущегося тела, по отношению к выбранной системе отсчета.

Способы описания движения



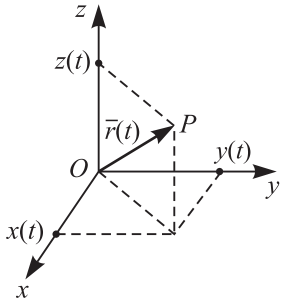
Векторный способ. Положение материальной точки P в пространстве задается радиусом-вектором $\overline{r}(t)$, проведенным из начала отсчета O.

Кинематический закон движения:

$$\overline{r} = \overline{r}(t).$$

Координатный способ. Положение материальной точки P в пространстве задается проекциями

$x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ радиуса-вектора $\overline{r}(t)$ на оси прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$:



$$\overline{r} = x(t)\overline{i} + y(t)\overline{j} + z(t)\overline{k},$$

где $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ – единичные векторы координатных осей.

Перемещение и путь

Перемещение $\Delta\overline{r}$ материальной точки за промежуток времени Δt – вектор, соединяющий начальное и конечное положения точки:

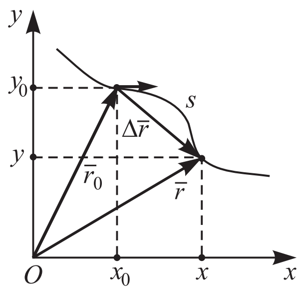
$$\Delta\overline{r} = \overline{r}(t+\Delta t) - \overline{r}(t).$$

Модуль перемещения

$$\Delta r = \left|\Delta\overline{r}\right| =$$

$$= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2},$$

$$[\Delta r] = 1 \text{ м}.$$



При движении материальной точки на плоскости Oxy:

$$\Delta\overline{r} = \overline{r} - \overline{r}_0 \quad \text{или} \quad \begin{cases} \Delta x = x - x_0, \\ \Delta y = y - y_0, \end{cases}$$

$$\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Путь s – скалярная величина, равная длине участка траектории между начальным и конечным положениями материальной точки.

Модуль перемещения за некоторый промежуток времени не может быть больше пройденного пути:

$$\Delta r \le s.$$

Знак равенства относится к случаю прямолинейного движения в одном направлении.

Скорость

Средняя скорость прохождения пути

$$\langle v \rangle = \frac{s}{t},$$

где s – путь, пройденный за время t.

Средняя скорость перемещения

$$\langle \overline{v} \rangle = \frac{\Delta \overline{r}}{\Delta t},$$

где $\Delta \overline{r}$ – перемещение за время Δt.

Скорость (или *мгновенная скорость*)

$$\overline{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overline{r}}{\Delta t}, \qquad \overline{v} = \overline{r}\,'(t).$$

Вектор $\overline{v}$ направлен по касательной к траектории материальной точки в сторону ее перемещения.

Справедливо равенство

$$\overline{v} = v_x \overline{i} + v_y \overline{j} + v_z \overline{k},$$

где $v_x = x'(t)$; $v_y = y'(t)$; $v_z = z'(t)$.

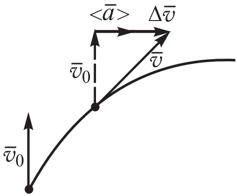
Модуль скорости

$$v = |\overline{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \qquad [v] = 1\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ускорение

Среднее ускорение

$$\langle \overline{a} \rangle = \frac{\Delta \overline{v}}{\Delta t},$$



где $\Delta\overline{v} = \overline{v} - \overline{v}_0$ – изменение скорости за время Δt.

Ускорение (или *мгновенное ускорение*)

$$\overline{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overline{v}}{\Delta t}, \quad \overline{a} = \overline{v}\,'(t), \quad \overline{a} = \overline{r}\,''(t).$$

Вектор $\overline{a}$ составляет с вектором $\overline{v}$ угол α, где $0 \le \alpha \le \pi$.

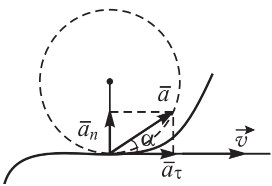
Справедливо равенство

$$\overline{a} = a_x \overline{i} + a_y \overline{j} + a_z \overline{k},$$

где $a_x = v'_x = x''(t)$; $a_y = v'_y = y''(t)$; $a_z = v'_z = z''(t)$.

Модуль ускорения

$$a = |\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad [a] = 1\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$



При произвольном плоском криволинейном движении ускорение

$$\overline{a} = \overline{a}_\tau + \overline{a}_n,$$

модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Здесь $\overline{a}_\tau$ – *тангенциальное* (или *касательное*) *ускорение*, характеризующее изменение модуля скорости и направленное вдоль касательной к траектории:

$$a_\tau = v'(t);$$

$\overline{a}_n$ – *нормальное* (или *центростремительное*) *ускорение*, характеризующее изменение направления скорости $\overline{v}(t)$ и направленное по нормали к касательной:

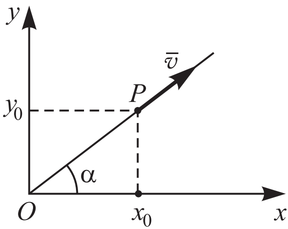
$$a_n = \frac{v^2}{R};$$

R – радиус кривизны траектории.

Классификация движений материальной точки:

Форма траектории	Характер движения	
	Равномерное, $v = \text{const}$	Неравномерное, $v \neq \text{const}$
Прямолинейная	$a_\tau = 0,\ a_n = 0$	$a_\tau \neq 0,\ a_n = 0$
Криволинейная	$a_\tau = 0,\ a_n \neq 0$	$a_\tau \neq 0,\ a_n \neq 0$

Равномерное движение



Равномерное движение – движение с постоянной по модулю скоростью ($v = \text{const}$).

Равномерное прямолинейное движение – движение, при котором материальная точка за любые равные промежутки времени совершает равные перемещения, т.е. это движение с постоянной скоростью ($\overline{v} = \overline{\text{const}}$).

Кинематический закон равномерного прямолинейного движения на плоскости xOy:

$$\overline{r} = \overline{r_0} + \overline{v}t \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x_0 + v_x t, \\ y = y_0 + v_y t, \end{cases}$$

где $v_x = v\cos\alpha$; $v_y = v\sin\alpha$.

Пройденный по траектории путь за время t:

$$s = vt.$$

Равнопеременное движение

Равнопеременное движение – движение, при котором модуль тангенциального ускорения остается постоянным ($a_\tau = \text{const}$).

Если $a_\tau > 0$ (т.е. $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$, где α – угол между скоростью $\overline{v}$ и ускорением $\overline{a}$ в любой момент времени), равнопеременное движение называется *равноускоренным*; если $a_\tau < 0$ $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha \le \pi\right)$ – *равнозамедленным*; при $\alpha_\tau = 0$ $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$ – *равномерным*.

Равнопеременное прямолинейное движение – движение, при котором $\overline{a}_\tau = \overline{a} = \overline{\text{const}}$ $(a_n = 0)$.

Кинематический закон равнопеременного движения:

$$\overline{r} = \overline{r}_0 + \overline{v}_0 t + \frac{\overline{a}t^2}{2},$$

где $\overline{r}_0$, $\overline{v}_0$ – соответственно положение материальной точки и ее скорость в начальный момент времени $t = 0$.

Закон изменения скорости:

$$\overline{v} = \overline{v}_0 + \overline{a}t.$$

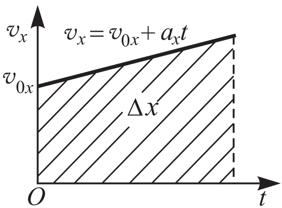
Проекции $\overline{r}$ и $\overline{v}$ на ось Ox (аналогичный вид имеют проекции на оси Oy и Oz):

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2},$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t.$$

Проекция перемещения материальной точки на ось Ox:

$$\Delta x = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, \qquad \Delta x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}.$$



Модуль проекции Δx численно равен площади прямоугольной трапеции:

$$\Delta x = \frac{(v_{0x} + v_x)t}{2}.$$

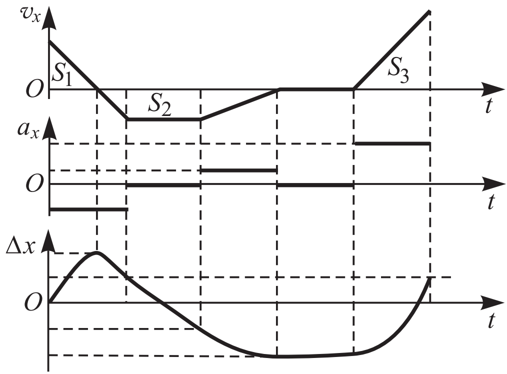
Графиком проекции $\Delta x(t)$ перемещения является парабола, положение вершины которой зависит от направлений начальной скорости и ускорения.

Путь, пройденный телом вдоль оси Ox за n-ю секунду,

$$s_n = v_{0x}\Delta t_n + (2n-1)\frac{a_x \Delta t_n^2}{2},$$

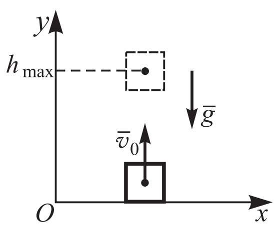
где $\Delta t_n = 1$ с.

Графики функций $v_x(t)$, $a_x(t)$ и $\Delta r_x(t)$ при прямолинейном движении:



На графике функции $v_x(t)$ пройденный путь численно равен сумме площадей $S_1 + S_2 + S_3$, модуль перемещения – алгебраической сумме $S_1 - S_2 + S_3$.

Движение тела, брошенного вертикально вверх



Движение тела с ускорением $\overline{a} = \overline{g}$, где $\overline{g}$ – ускорение свободного падения, является частным случаем равнопеременного движения.

Движение тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью $\overline{v}_0$, можно представить как сложение двух прямолинейных движений, совершаемых телом одновременно:

1) равномерного движения вертикально вверх со скоростью $\overline{v}_0$;

2) равноускоренного движения вертикально вниз с ускорением свободного падения $\overline{g}$.

Проекция скорости на ось *Oy*

$$v_y = v_0 - gt.$$

Кинематические уравнения движения тела:

$$x = 0, \quad y = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Время подъема тела до высшей точки траектории и возвращения в исходную точку одинаково и равно

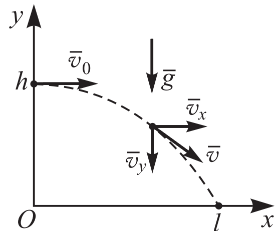
$$t_1 = \frac{v_0}{g}.$$

В общем случае (с учетом сопротивления воздуха) время падения больше времени подъема.

Максимальная высота подъема тела

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Движение тела, брошенного горизонтально



Движение тела, брошенного с высоты h горизонтально с начальной скоростью $\overline{v}_0$, можно представить как сложение двух прямолинейных движений, совершаемых телом одновременно:

1) равномерного движения в горизонтальном направлении со скоростью $\overline{v}_0$;

2) равноускоренного движения вертикально вниз с ускорением свободного падения $\overline{g}$.

Проекции скорости на оси координат:

$$v_x = v_0, \quad v_y = -gt.$$

Модуль скорости

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}.$$

Кинематические уравнения движения тела:

$$x = v_0 t, \quad y = h - \frac{gt^2}{2}.$$

Траекторией движения является парабола, заданная уравнением

$$y = h - \frac{g}{2v_0^2}x^2.$$

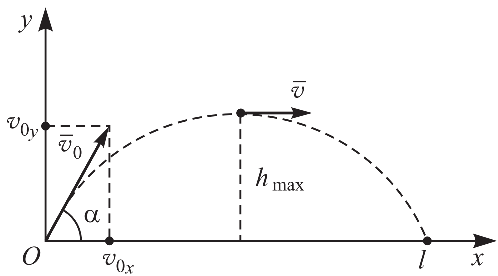
Время движения тела

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Дальность полета тела

$$l = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Движение тела, брошенного под углом к горизонту



Движение тела, брошенного под углом α к горизонту с начальной скоростью $\overline{v}_0$, можно представить как сложение двух прямолинейных движений, совершаемых телом одновременно:

1) равномерного движения в горизонтальном направлении со скоростью $\overline{v}_{0x}$, модуль которой

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha;$$

2) движения тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью $\overline{v}_{0y}$, модуль которой

$$v_{0y} = v_0 \sin\alpha.$$

Проекция скорости на ось Oy

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt.$$

Модуль скорости

$$v = \sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + (v_0 \sin\alpha - gt)^2}.$$

Кинематические уравнения движения тела:

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t, \quad y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Траекторией движения является парабола, заданная уравнением

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \operatorname{tg} \alpha \cdot x.$$

Время подъема тела до высшей точки траектории

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Максимальная высота подъема тела

$$h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Время движения тела

$$t_2 = 2t_1.$$

Дальность полета тела

$$l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

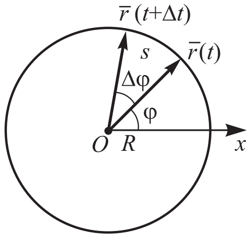
Модуль скорости тела в момент падения

$$v = v_0.$$

В моменты бросания и падения тела:

$$a_n = g \cos \alpha, \qquad a_\tau = g \sin \alpha.$$

Движение по окружности



Положение материальной точки на окружности радиусом R определяется с помощью угла φ между радиусом-вектором $\overline{r}$ материальной точки, проведенным из центра окружности, и выбранным направлением (осью Ox); $[\varphi] = 1$ рад.

Угловая скорость

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \quad \omega = \varphi'(t), \quad [\omega] = 1\,\frac{\text{рад}}{\text{с}},$$

где $\Delta\varphi = \dfrac{s}{R}$ – угол поворота за время Δt; s – длина дуги.

Угловое ускорение

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \quad \varepsilon = \omega'(t), \ \ \varepsilon = \varphi''(t), \quad [\varepsilon] = 1\,\frac{\text{рад}}{\text{с}^2},$$

где $\Delta\omega$ – изменение угловой скорости за время Δt.

Связь между линейными и угловыми характеристиками движения точки по окружности радиусом R:

$$\boldsymbol{v} = \omega R, \quad a_\tau = \varepsilon R, \quad a_n = \omega^2 R, \quad a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Равномерное вращение характеризуется периодом и частотой вращения:

- *период вращения* T – время, за которое материальная точка совершает один полный оборот ($\Delta\varphi = 2\pi$);
- *частота вращения* ν – величина, равная количеству оборотов, совершаемых материальной точкой за единицу времени; $[\nu] = 1\ \text{c}^{-1}$:

$$\nu = \frac{1}{T}, \quad \omega = 2\pi\nu, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Движение твердого тела

Простейшие виды движения твердого тела:

- *поступательное* – движение, при котором всякая прямая, связанная с движущимся телом, остается параллельной самой себе;
- *вращательное* – движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, плоскости которых перпендикулярны к неподвижной прямой (*оси вращения*), содержащей центры окружностей.

Произвольное движение твердого тела можно представить как совокупность поступательного и вращательного движений.

При поступательном равнопеременном движении все точки твердого тела движутся с $a_\tau = \text{const}$.

При равнопеременном вращении твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$\varepsilon = \mathrm{const}, \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad \varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

где ω_0 – начальная угловая скорость.

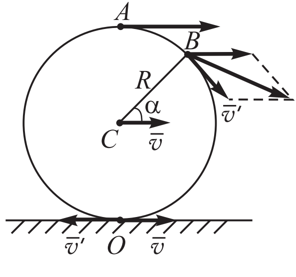
Плоское движение – движение, при котором все точки тела перемещаются в параллельных плоскостях.

При плоском движении колеса без проскальзывания модуль скорости v' любой точки на его ободе относительно оси колеса равен модулю скорости v поступательного движения колеса относительно Земли.

Скорости разных точек колеса относительно Земли имеют разные значения:

$$v_O = 0, \quad v_C = v, \quad v_A = 2v,$$

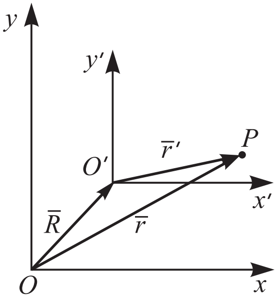
$$v_B = v\sqrt{2}\sqrt{1+\sin\alpha}.$$



За один оборот колеса все его точки перемещаются на расстояние $2\pi R$, где R – радиус колеса.

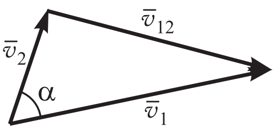
Относительность движения

Закон сложения скоростей:



$$\overline{v} = \overline{v}' + \overline{u} \qquad (\overline{r} = \overline{r}' + \overline{R}),$$

где $\overline{v}$ – скорость точки P относительно неподвижной системы отсчета Oxy; $\overline{v}'$ – скорость точки P относительно системы отсчета $O'x'y'$; $\overline{u}$ – скорость движения системы отсчета $O'x'y'$ относительно неподвижной системы отсчета Oxy.



Относительная скорость двух тел, движущихся со скоростями $\overline{v}_1$ и $\overline{v}_2$ (первого относительно второго):

$$\overline{v}_{12} = \overline{v}_1 - \overline{v}_2.$$

Если тела движутся под углом α друг к другу, то

$$v_{12}^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos\alpha,$$

где v_{12} – модуль относительной скорости.

Частные случаи относительного движения:

- если $\alpha = 0$, то $v_{12} = |v_1 - v_2|$;

- если $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, то $v_{12} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$;
- если $\alpha = \pi$, то $v_{12} = v_1 + v_2$.

3. Динамика

Динамика – раздел классической механики, в котором рассматриваются закономерности движения тел с учетом их взаимодействия с другими телами.

Основные понятия

Сила $\overline{F}$– векторная величина, являющаяся мерой взаимодействия тел, в результате которого тела приобретают ускорение или деформируются; $[F] = 1$ Н.

Принцип суперпозиции сил. Если на тело действуют одновременно несколько сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$, то их равнодействующая $\overline{F}$ является векторной суммой всех этих сил:

$$\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + ... + \overline{F}_n.$$

Основная задача динамики – установление закона движения тела, если известны действующие на него силы и начальные условия движения $(\overline{r}_0, \overline{v}_0)$.

Инертность – свойство взаимодействующих тел приобретать разные ускорения при одинаковых внешних воздействиях.

Масса тела – мера инертности поступательно движущегося тела, а также мера гравитационного взаимодействия тел.

Импульс $\overline{p}$ тела – векторная величина, равная произведению массы m тела на его скорость $\overline{v}$:

$$\overline{p} = m\overline{v}, \quad [p] = 1\,\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}.$$

Импульсом силы называется произведение силы $\overline{F}$ на время ее действия Δt.

Первый закон Ньютона

Существуют такие системы отсчета, называемые *инерциальными системами отсчета* (ИСО), относительно которых тело, не подверженное действию других тел, покоится или движется равномерно и прямолинейно.

Любая система отсчета, покоящаяся или движущаяся равномерно и прямолинейно относительно ИСО, также является инерциальной.

Инерциальной системой отсчета с большой степенью точности можно считать систему отсчета, связанную с центром Солнца (*гелиоцентрическая система*).

Система отсчета, связанная с центром Земли (*геоцентрическая система*), выбирается в качестве инерциальной, если можно пренебречь вращением Земли вокруг своей оси и вокруг Солнца.

Принцип относительности Галилея. Все механические явления протекают в ИСО одинаково при одинаковых начальных условиях.

Второй закон Ньютона

Второй закон Ньютона выполняется в ИСО и выражает связь между изменением импульса тела и действующими на него силами:

• изменение импульса $\Delta\overline{p}$ тела за малый промежуток времени Δt равно соответствующему импульсу силы:

$$\Delta\overline{p} = \overline{F}\Delta t;$$

• скорость изменения импульса равна равнодействующей сил, приложенных к телу:

$$\overline{p}' = \overline{F};$$

• для тела, масса m которого не изменяется в процессе движения,

$$m\overline{v}'(t) = \overline{F}, \quad \text{или} \quad m\overline{a} = \overline{F};$$

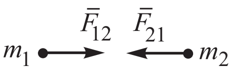
• если масса m тела изменяется в процессе движения, то

$$m\overline{a} = \overline{F} + \overline{R},$$

где $\overline{R} = \dfrac{\Delta m}{\Delta t}\overline{u}$ – *реактивная сила*, характеризующая механическое действие на тело частиц, отделяющихся от него или присоединяющихся к нему со скоростью $\overline{u}$ относительно тела.

Третий закон Ньютона

Силы $\overline{F}_{12}$, $\overline{F}_{21}$ взаимодействия двух тел равны по модулю, противоположны по направлению, действуют вдоль одной прямой и имеют одинаковую физическую природу:



$$\overline{F}_{12} = -\overline{F}_{21}.$$

Закон всемирного тяготения

Две материальные точки (или однородные сферические тела) массами m_1 и m_2 притягиваются друг к другу с *силой тяготения* $\overline{F}$, модуль которой прямо пропорционален произведению их масс и обратно пропорционален квадрату расстояния r между ними (их центрами):

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где G – гравитационная постоянная.

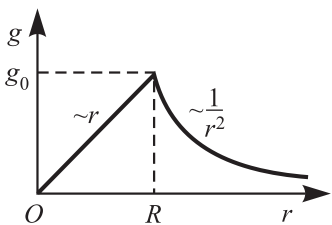
Ускорение свободного падения при движении тела под действием силы притяжения зависит от высоты h тела над поверхностью планеты массой M и радиусом R (без учета ее вращения):

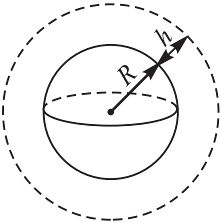
$$g = G\frac{M}{(R+h)^2}.$$

Если $h \ll R$, то

$$g_0 = G\frac{M}{R^2}.$$

Графическая зависимость ускорения свободного падения g от расстояния r до центра планеты:





Скорость движения спутника по круговой орбите на высоте h над поверхностью планеты массой M:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}},\ v = \sqrt{\frac{g_0 R^2}{R+h}},$$

где R – радиус планеты; g_0 – ускорение свободного падения вблизи ее поверхности.

Различают три космические скорости:

• *первая космическая скорость* v_{I} – минимальная начальная скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно стало спутником планеты; вблизи поверхности планеты

$$v_{\text{I}} = \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

Для Земли $v_{\text{I}} = \sqrt{g_0 R_З} \approx 7{,}9\ \frac{\text{км}}{\text{с}}$;

• *вторая космическая скорость* v_{II} – минимальная начальная скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно, преодолев притяжение планеты, превратилось в спутник Солнца; при запуске тела с поверхности Земли

$$v_{\text{II}} = \sqrt{2g_0R_З} \approx 11{,}2\,\frac{\text{км}}{\text{с}};$$

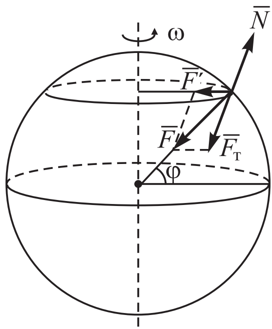
• *третья космическая скорость* v_{III} – минимальная начальная скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно, преодолев притяжение Солнца, покинуло Солнечную систему; при запуске тела с поверхности Земли

$$v_{\text{III}} \approx 16{,}6\,\frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Сила тяжести и вес тела

Сила тяжести $\overline{F}_{\text{т}}$ – сила, действующая на тело массой m со стороны Земли и сообщающая ему ускорение $\overline{g}$:

$$\overline{F}_{\text{т}} = m\overline{g}.$$



При вращении Земли вокруг своей оси покоящееся тело массой m, которое находится на широте φ, движется с ускорением $\overline{a}_n$ по окружности радиусом $r = R\cos\varphi$ под действием равнодействующей $\overline{F}'$ силы тяготения $\overline{F}$ и реакции

$\overline{N}$ земной поверхности, которую уравновешивает сила тяжести $\overline{F}_т$.

Сила тяжести $\overline{F}_т$ равна силе тяготения $\overline{F}$ только на полюсах. На экваторе они совпадают по направлению, но имеют наибольшее различие по величине:

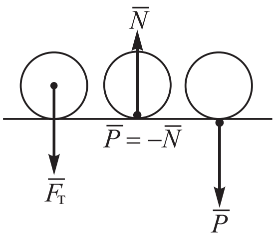
$$F_т = F - m\omega^2 R_З,$$

где ω – угловая скорость вращения Земли; $R_З$ – радиус Земли.

Так как различие величин силы тяжести $\overline{F}_т$ и силы тяготения $\overline{F}$ мало (меньше 0,34%), то им часто пренебрегают. Тогда

$$mg = G\frac{Mm}{(R+h)^2}.$$

Вес тела $\overline{P}$ – сила, с которой тело вследствие притяжения его Землей действует на опору или подвес.



Сила тяжести $\overline{F}_т$ и вес тела $\overline{P}$ приложены к разным телам: сила тяжести – к центру тяжести тела, а вес – к опоре или подвесу.

Если тело и опора либо подвес покоятся или движутся без ускорения относительно Земли, то вес тела и сила тяжести численно совпадают.

Модуль веса тела зависит от модуля и направления ускорения $\overline{a}$ опоры (подвеса):

• при горизонтальном движении ($\overline{a} \perp \overline{g}$)

$$P_{\rightarrow} = m\sqrt{g^2 + a^2};$$

• при движении вертикально вверх (векторы $\overline{a}$ и $\overline{g}$ противоположно направлены)

$$P_{\uparrow} = m(g + a);$$

• при движении вертикально вниз (векторы $\overline{a}$ и $\overline{g}$ одинаково направлены)

$$P_{\downarrow} = m(g - a).$$

В состоянии невесомости ($\overline{a} = \overline{g}$)

$$P = 0.$$

Сила упругости

Деформация – изменение формы и размеров тела при действии внешних сил.

Деформация называется *упругой*, если она полностью исчезает после прекращения действия внешних сил.

Сила упругости $\overline{F}_{упр}$ – сила, возникающая при деформации тела и противодействующая этой деформации.

Сила упругости действует в любом сечении деформируемого тела в направлении, противоположном направлению перемещения частиц тела.

Силы упругости, действующие на пружины, направлены вдоль их оси.

Сила $\overline{N}$ нормальной реакции опоры – упругая сила, действующая на тело со стороны опоры.

Закон Гука. В случае малых деформаций (сжатия и растяжения) модуль силы упругости прямо пропорционален величине абсолютной деформации:

$$F_{\text{упр}} = k\Delta l,$$

где k – жесткость тела, зависящая от его размеров и материала, из которого оно изготовлено; $\Delta l = \left| l - l_0 \right|$ – *абсолютная деформация тела*; l, l_0 – длина тела соответственно в деформированном и недеформированном состояниях.

Механическое напряжение

$$\sigma = \frac{F_{\text{упр}}}{S}, \quad [\sigma] = 1\,\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 1\text{ Па (паскаль)},$$

где $F_{\text{упр}}$ – модуль силы упругости; S – площадь поперечного сечения деформируемого тела.

Опытным путем установлено, что

$$\sigma = E\varepsilon,$$

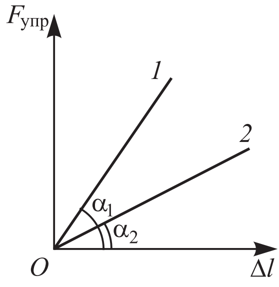
где $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l_0}$ – *относительная деформация тела*; E – *модуль Юнга*, являющийся характеристикой упругих свойств тела; $[E] = 1$ Па.

Жесткость (или *коэффициент упругости*)

$$k = \frac{ES}{l_0}, \quad [k] = 1\,\frac{\text{Н}}{\text{м}},$$

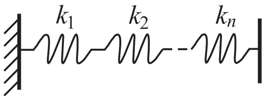
где E – модуль Юнга; S – площадь поперечного сечения деформируемого тела; l_0 – длина тела в недеформированном состоянии.

На графике $F_{\text{упр}}(\Delta l)$ жесткость k пропорциональна $\operatorname{tg}\alpha$.



Если тела имеют одинаковые размеры, но изготовлены из разных материалов, то $E_1 > E_2$. Если различаются только исходные длины тел, то $l_{02} > l_{01}$.

При последовательном соединении n пружин с жесткостями $k_1, k_2, \ldots, k_n$



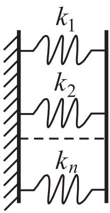
$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \ldots + \frac{1}{k_n},$$

где k – суммарная жесткость.

Если $k_1 = k_2 = \ldots = k_n$, то

$$k = \frac{k_1}{n}.$$

При параллельном соединении n пружин с жесткостями $k_1, k_2, \ldots, k_n$ суммарная жесткость



$$k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n.$$

Если $k_1 = k_2 = \ldots = k_n$, то

$$k = nk_1.$$

При переходе от n последовательно соединенных одинаковых пружин к их параллельному соединению суммарная жесткость возрастает в n^2 раз.

Силы трения

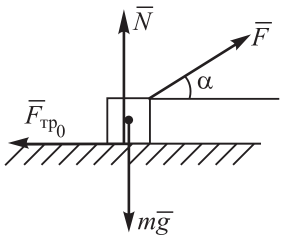
Трение – взаимодействие соприкасающихся тел, затрудняющее их относительное перемещение.

Сила трения – количественная характеристика трения. Она является составляющей силы взаимодействия тел и направлена параллельно поверхности их соприкосновения.

Различают *сухое трение*, возникающее при соприкосновении твердых тел, и *вязкое*, возникающее при движении тел в жидкой или газообразной среде.

Виды сухого трения: трение покоя, трение скольжения, трение качения.

Сила трения покоя $\overline{F}_{\text{тр}_0}$ численно равна касательной составляющей $F_\tau = F\cos\alpha$ внешней силы $\overline{F}$, стремящейся вывести тело из состояния покоя.



Модуль силы трения покоя может принимать значения от нуля до максимального значения $F_{\text{тр}_0\,\max}$:

$$F_{\text{тр}_0\,\max} = \mu_0 N,$$

где μ_0 – коэффициент трения покоя, зависящий от качества обработки поверхностей и материалов соприкасающихся тел; N – модуль силы нормальной реакции опоры, равный модулю силы нормального давления тела на опору.

Сила трения покоя может как препятствовать, так и способствовать началу движения.

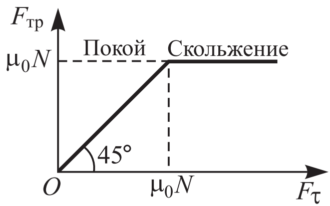
Если $F_\tau > F_{\text{тр}_0\,\max}$, то неподвижное тело придет в движение. В этом случае возникает *сила трения скольжения* $\overline{F}_{\text{тр}}$, модуль которой

$$F_{\text{тр}} = \mu N,$$

где μ – коэффициент трения скольжения $(\mu \le \mu_0)$; $N = mg - F\sin\alpha$.

Сила трения скольжения направлена противоположно относительной скорости соприкасающихся тел.

Графическая зависимость $F_{\text{тр}}(F_\tau)$:

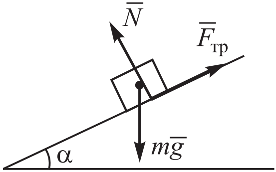


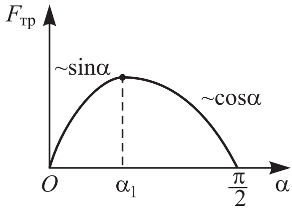
Зависимость модулей силы трения покоя $\overline{F}_{\text{тр}_0}$ и силы трения скольжения $\overline{F}_{\text{тр}}$ от величины угла α наклона плоскости:

$$\overline{F}_{\text{тр}_0} = mg\sin\alpha, \quad F_{\text{тр}} = \mu mg\cos\alpha.$$

Угол, при котором начинается скольжение,

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg}\mu.$$

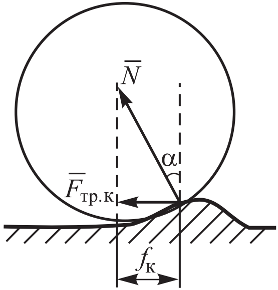




Сила трения качения $\overline{F}_{тр.к}$ возникает из-за деформации поверхности перед катящимся телом. Ее модуль

$$F_{тр.к} = N\sin\alpha = f_к \frac{N}{R},$$

где $f_к$ – коэффициент трения качения; R – радиус катящегося тела.



Сила взаимодействия движущегося тела с поверхностью

$$\overline{F}_{вз} = \overline{F}_{тр} + \overline{N}.$$

При движении тела в жидкой или газообразной среде возникает *сила сопротивления* $\overline{F}_{\text{сопр}}$ движению (или *сила вязкого трения*).

При небольших скоростях

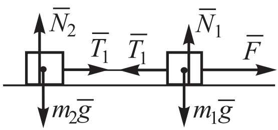
$$\overline{F}_{\text{сопр}} = -k\overline{v},$$

где k – коэффициент вязкого трения, зависящий от формы и размеров движущегося тела, свойств жидкости или газа.

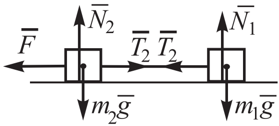
Движение связанных тел

Если тела связаны невесомой нитью, то сила упругости нити одинакова в любом ее сечении.

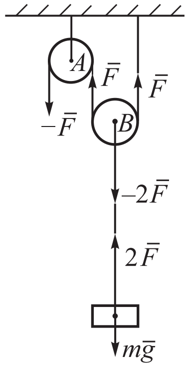
Сила упругости нити зависит от того, к какому из связанных тел приложена внешняя сила (поверхность гладкая):



$$T_1 = \frac{F}{\dfrac{m_1}{m_2} + 1},$$



$$T_2 = \frac{F}{\dfrac{m_2}{m_1} + 1}.$$



Для определения силы упругости весомой нити (упругого стержня) в некотором сечении необходимо представить нить (стержень) в виде отдельных частей, разделенных данным сечением и связанных невесомой нитью, сила упругости которой равна искомому значению.

Тела, связанные нерастяжимой нитью, движутся с одинаковым ускорением.

Для поднятия грузов используется *система блоков*.

Неподвижный блок A не дает выигрыша в силе, а лишь изменяет ее направление.

С помощью неподвижного A и подвижного B блоков можно поднять груз, вес которого в 2 раза больше приложенной силы $\bar{F}$ (при условии невесомости нити и блока).

4. Статика

Статика – раздел классической механики, в котором изучается равновесие твердых тел, т.е. состояние покоя тел при наличии внешнего воздействия.

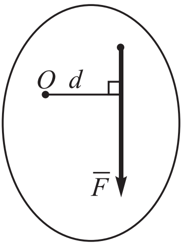
Условия равновесия твердых тел

Условия равновесия – равенства (число которых равно числу степеней свободы тела), связывающие действующие силы и параметры, определяющие положение тела.

Тело остается в состоянии покоя, если нет причин, приводящих к возникновению его поступательного или вращательного движения.

Поступательное движение под действием сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$ не происходит, если

$$\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + ... + \overline{F}_n = \overline{0}.$$



Вращательное действие силы $\overline{F}$ относительно неподвижной оси характеризуется моментом силы

$$M = \pm Fd, \quad [M] = 1\ \text{Н} \cdot \text{м},$$

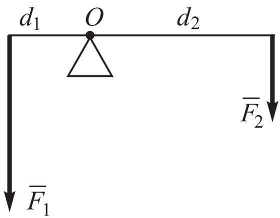
где d – *плечо силы* – кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы (ось вращения O перпендикулярна к плоскости рисунка).

Момент силы, стремящейся повернуть тело в направлении движения часовой стрелки вокруг оси вращения, считается положительным, в противоположном направлении – отрицательным.

Вращение тела относительно оси не возникает, если

$$M_1 + M_2 + ... + M_n = 0,$$

где $M_1, M_2, ..., M_n$ – моменты внешних сил относительно этой оси.



Рычаг – твердое тело, на которое действуют две параллельные силы, стремящиеся повернуть тело относительно оси вращения O.

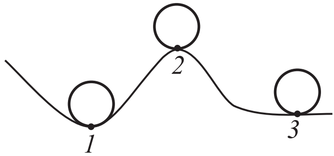
Условие равновесия рычага:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1}.$$

Существует три вида равновесия:

• *устойчивое* – равновесие, при выводе из которого возникают силы (или моменты сил), возвращающие тело в положение равновесия (точка *1* на рисунке);

• *неустойчивое* – равновесие, отклонение от которого сопровождается возникновением сил, уводящих тело от положения равновесия (точка *2*);



• *безразличное* – равновесие, при котором не возникают силы, стремящиеся сместить тело (точка *3*).

Центр масс и центр тяжести

Центр масс C системы *n* материальных точек (тела) – точка, положение которой задается радиусом-вектором $\overline{r}_C$:

$$\overline{r}_C = \frac{m_1\overline{r}_1 + m_2\overline{r}_2 + \ldots + m_n\overline{r}_n}{m},$$

где m_k – масса k-й точки; $\overline{r}_k$ – радиус-вектор, определяющий положение k-й точки; $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ – масса системы (тела).

Декартовы координаты центра масс:

$$x_C = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m},$$

$$y_C = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{m},$$

где x_k, y_k – координаты радиусов-векторов $\overline{r}_k$.

Скорость движения центра масс

$$\overline{v}_C = \frac{m_1\overline{v}_1 + m_2\overline{v}_2 + \ldots + m_n\overline{v}_n}{m},$$

где $\overline{v}_k$ – скорость движения k-й точки.

Импульс системы (тела)

$$\overline{P} = m\overline{v}_C.$$

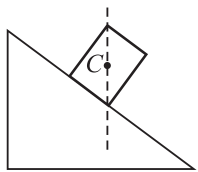
Центр масс системы (тела) движется так, как двигалась бы материальная точка, масса которой равна массе системы (тела), под действием всех внешних сил.

Центр тяжести – точка приложения равнодействующей сил тяжести, действующих на части тела.

В однородном поле силы тяжести центр масс тела совпадает с его центром тяжести.

Сумма моментов сил тяжести всех частей тела относительно центра тяжести равна нулю.

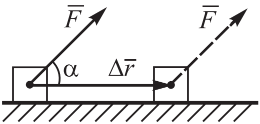
Тело не опрокинется, если вертикальная прямая, проходящая через центр тяжести, не выходит за пределы площади опоры.



5. Работа и механическая энергия

Работа силы

Работа (или *механическая работа*) постоянной силы $\overline{F}$ на перемещении $\Delta\overline{r}$



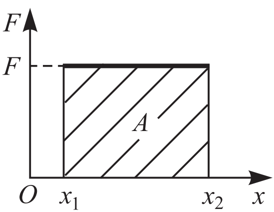
$$A = F\Delta r \cos\alpha,$$

$$[A] = 1 \text{ Дж (джоуль)},$$

где α – угол между векторами $\overline{F}$ и $\Delta\overline{r}$.

В частности:

- если $0 \le \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, то $A > 0$;
- если $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, то $A = 0$;
- если $\dfrac{\pi}{2} < \alpha \le \pi$, то $A < 0$.

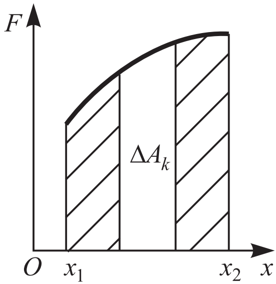


Работа A постоянной силы $\overline{F}$ на перемещении $\Delta x = x_2 - x_1$ численно равна площади прямоугольника.

Работа переменной силы $\overline{F}$

$$A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \ldots + \Delta A_n,$$

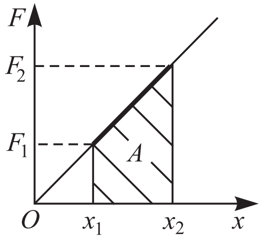
где ΔA_k – работа на элементарных перемещениях, в пределах которых сила $\overline{F}$ и соответствующий угол α постоянны.



Работа переменной силы численно равна площади криволинейной трапеции.

Работа силы, модуль которой изменяется линейно от F_1 до F_2 на перемещении Δx,

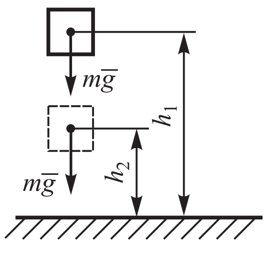
$$A = \frac{F_1 + F_2}{2}\Delta x.$$

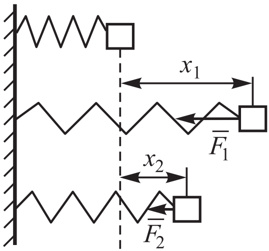


Работа A линейной силы численно равна площади прямоугольной трапеции.

Работа силы тяжести

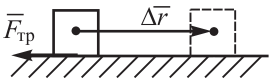
$$A = mg(h_1 - h_2).$$





Работа силы упругости

$$A = \frac{F_1 + F_2}{2}(x_1 - x_2).$$



Работа силы трения скольжения

$$A = -F_{тр}\left|\Delta\overline{r}\right|.$$

Силы, работа которых не зависит от формы траектории движения тела и закона движения по этой траектории, а зависит только от начального и конечного положений тела, называются *консервативными*.

Работа консервативных сил на замкнутой траектории равна нулю.

Консервативные силы в механике – сила тяжести, сила тяготения, сила упругости. Неконсервативные силы – силы трения и сопротивления.

Мощность

Мощность характеризует быстроту совершения работы.

Средняя мощность

$$\langle P \rangle = \frac{A}{t}, \quad [P] = 1\ \text{Вт (ватт)},$$

где A – работа силы за время t.

При движении тела под действием постоянной силы $\overline{F}$ средняя мощность

$$\langle P \rangle = F \langle v \rangle \cos\alpha,$$

где $\langle v \rangle$ – средняя скорость прохождения пути; α – угол между векторами $\overline{F}$ и $\langle \overline{v} \rangle$.

Мгновенная мощность

$$P = Fv\cos\alpha.$$

Эффективность работы характеризуется коэффициентом полезного действия.

Коэффициент полезного действия (КПД) машины (механизма)

$$\eta = \frac{A_\text{п}}{A} \cdot 100\% \quad \text{или} \quad \eta = \frac{N_\text{п}}{N} \cdot 100\%,$$

где $A_\text{п}$– полезная работа; A – совершенная работа; $N_\text{п}$ – полезная мощность; N – затраченная мощность.

КПД реальных механизмов меньше единицы.

Простые механизмы (рычаг, блок, ворот, клин) не дают выигрыша в работе: во сколько раз выигрываем в силе, во столько раз проигрываем в расстоянии.

Кинетическая энергия

Механическая энергия E – скалярная величина, характеризующая способность системы тел совершать работу при изменении своего механического состояния.

Механическая энергия равна сумме кинетической и потенциальной энергий.

Кинетическая энергия $E_к$ – энергия, которой обладает тело вследствие своего движения.

Кинетическая энергия материальной точки или твердого тела, совершающего поступательное движение:

$$E_к = \frac{mv^2}{2}, \quad E_к = \frac{p^2}{2m},$$

где m – масса; v – скорость; p – импульс.

Теорема об изменении кинетической энергии. Изменение кинетической энергии $\Delta E_к$ равно алгебраической сумме A работ всех действующих сил:

$$\Delta E_к = A.$$

Потенциальная энергия

Потенциальная энергия $E_п$ – энергия взаимодействия тел, зависящая от их взаимного расположения (конфигурации системы) и положения тел системы во внешнем поле консервативных сил.

Работа A_{12} консервативных сил равна убыли потенциальной энергии системы тел:

$$A_{12} = E_{п1} - E_{п2},$$

где $E_{п1}$, $E_{п2}$ – потенциальная энергия системы в начальном и конечном положениях соответственно.

Потенциальная энергия определяется с точностью до произвольной постоянной. Для ее однозначного определения $E_п$ какой-либо конфигурации взаимодействующих тел полагают равной нулю.

Потенциальная энергия тела массой m, находящегося на высоте h вблизи поверхности Земли,

$$E_п = mgh \quad (E_п = 0 \text{ при } h = 0),$$

где g – ускорение свободного падения.

Потенциальная энергия тела массой m в поле тяготения планеты массой M

$$E_п = -G\frac{Mm}{r} \quad (E_п = 0 \text{ при } r \to \infty),$$

где G – гравитационная постоянная; r – расстояние между телом и центром планеты.

Потенциальная энергия упруго деформированного тела

$$E_п = \frac{k(\Delta l)^2}{2} \quad (E_п = 0 \text{ при } \Delta l = 0),$$

где k – жесткость тела; Δl – абсолютная деформация.

6. Законы сохранения

Закон сохранения импульса

Система тел называется *замкнутой* (или *изолированной*), если на тела не действуют внешние силы (со стороны тел, не входящих в систему).

Импульс замкнутой системы n тел сохраняется при любых взаимодействиях тел внутри системы:

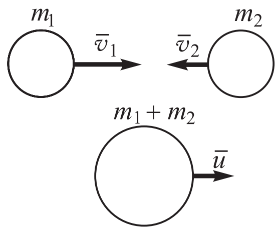
$$m_1\overline{v}_1 + m_2\overline{v}_2 + ... + m_n\overline{v}_n = \overline{\text{const}}.$$

Изменение импульса системы происходит под действием внешних сил.

В случае незамкнутых систем закон сохранения импульса выполняется, если векторная сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю.

Если проекция равнодействующей внешних сил на некоторое направление равна нулю, то проекция импульса на это направление сохраняется.

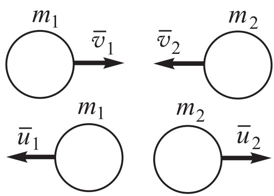
Закон сохранения импульса в случае соударения двух тел массами m_1 и m_2, движущихся со скоростями $\overline{v}_1$ и $\overline{v}_2$ соответственно:



- при неупругом ударе

$$m_1\overline{v}_1 + m_2\overline{v}_2 = (m_1 + m_2)\overline{u},$$

где $\overline{u}$ – скорость движущихся вместе тел после соударения;



- при упругом ударе

$$m_1\overline{v}_1 + m_2\overline{v}_2 = m_1\overline{u}_1 + m_2\overline{u}_2,$$

где $\overline{u}_1$, $\overline{u}_2$ – скорости тел после упругого соударения.

При упругом соударении выполняется также закон сохранения энергии:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}.$$

В случае центрального удара (тела движутся вдоль одной прямой) модули скоростей тел после соударения:

$$u_1 = \frac{(m_2 - m_1)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad u_2 = \frac{(m_1 - m_2)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Закон сохранения импульса при реактивном движении:

$$M\overline{v}_1 + m\overline{v}_2 = \overline{0},$$

где M, $\overline{v}_1$ – соответственно масса и скорость тела; m, $\overline{v}_2$ – масса и скорость отделяемого вещества.

Ускорение тела при реактивном движении происходит без взаимодействия с внешними телами.

Закон сохранения механической энергии

Если в замкнутой системе тел действуют только консервативные силы или работа неконсервативных сил равна нулю, то механическая энергия сохраняется:

$$E = \text{const} \quad \text{или} \quad E_{\text{к}1} + E_{\text{п}1} = E_{\text{к}2} + E_{\text{п}2},$$

где $E_{\text{к}1}$, $E_{\text{п}1}$, $E_{\text{к}2}$, $E_{\text{п}2}$ – кинетическая и потенциальная энергии двух положений (состояний) системы.

Изменение механической энергии под действием внешних и внутренних неконсервативных сил равно суммарной работе этих сил:

$$(E_{\text{к}2}+E_{\text{п}2})-(E_{\text{к}1}+E_{\text{п}1})=A_{\text{нкс}}.$$

Законы сохранения связаны со свойствами пространства и времени:

- закон сохранения импульса следует из однородности пространства (результат любого эксперимента не зависит от места его проведения);
- закон сохранения энергии следует из однородности времени (результат любого эксперимента не зависит от момента его проведения).

Законы изменения импульса и энергии отражают взаимосвязь свойств пространства и времени:

- изменение импульса определяется временно́й характеристикой действия силы – импульсом силы;
- изменение энергии определяется пространственной характеристикой действия силы – работой силы.

7. Механика жидкостей и газов

Закон Паскаля

Давление внутри жидкости (газа)

$$p=\frac{F_n}{S},\qquad [p]=1\ \text{Па (паскаль)},$$

где F_n – нормальная составляющая силы, действующей на малую плоскую поверхность площадью S.

Гидростатическое давление p – давление, действующее на малую площадку S (независимо от ее ориентации) внутри жидкости и обусловленное весом жидкости:

$$p = \frac{mg}{S}, \quad p = \frac{\rho V g}{S}, \quad p = \rho g h,$$

где m – масса жидкости; g – ускорение свободного падения; ρ – плотность жидкости; V – ее объем; h – высота столба жидкости.

Сила гидростатического давления жидкости на дно сосуда площадью $S_\text{д}$

$$F_\text{д} = \rho g h S_\text{д}.$$

Сила гидростатического давления жидкости на боковую поверхность площадью $S_\text{бок}$ сосуда прямоугольной формы

$$F = \frac{\rho g h}{2} S_\text{бок}.$$

Гидростатический парадокс – отличие веса жидкости в сосуде от силы давления жидкости на дно сосуда:

в расширяющихся кверху сосудах сила давления на дно меньше веса, а в суживающихся – больше (при одинаковой площади дна).

Атмосферное давление – давление атмосферного воздуха на предметы и земную поверхность, обусловленное весом вышележащего столба воздуха. Оно не пропорционально высоте h, так как плотность атмосферы уменьшается с увеличением h.

Атмосферное давление может быть выражено в миллиметрах ртутного столба:

$$1 \text{ мм рт. ст.} = 133 \text{ Па}.$$

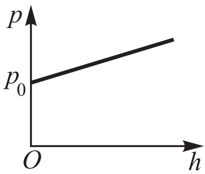
Нормальное атмосферное давление p_0 – давление на уровне моря, равное давлению столба ртути высотой 760 мм при температуре 0 °С :

$$p_0 = 760 \text{ мм рт. ст.} \approx 1{,}01 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Барометр – прибор для измерения атмосферного давления.

Манометр – прибор для измерения давления жидкости или газа в замкнутом пространстве.

З а к о н П а с к а л я. Жидкости и газы передают оказываемое на них давление по всем направлениям одинаково.



Если над свободной поверхностью жидкости создается давление p_0, то на глубине h давление

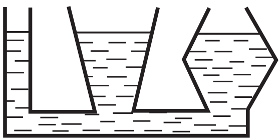
$$p = p_0 + \rho g h.$$

Сообщающиеся сосуды

Сообщающиеся сосуды – сосуды, соединенные таким образом, что жидкость может перетекать из одного сосуда в другой.

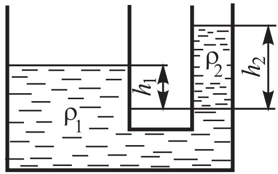
В поле силы тяжести поверхность жидкости, находящейся в равновесии, всегда горизонтальна.

Закон сообщающихся сосудов. Однородная жидкость устанавливается в неподвижных сообщающихся сосудах так, что давление во всех точках, расположенных в одной горизонтальной плоскости, одинаково.



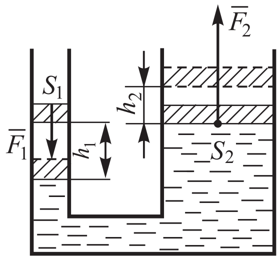
Уровень однородной жидкости в сообщающихся сосудах одинаков независимо от их формы.

Если в сообщающиеся сосуды налиты две несмешивающиеся жидкости, то высоты столбов жидкостей над уровнем раздела обратно



пропорциональны плотностям этих жидкостей:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$



Гидравлический пресс – система двух заполненных однородной несжимаемой жидкостью и закрытых поршнями сообщающихся сосудов, имеющих различные площади S_1 и S_2.

Для гидравлического пресса выполняются следующие условия:

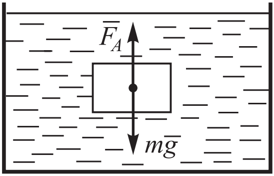
$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \text{ – равенство давлений;}$$

$$F_1 h_1 = F_2 h_2 \text{ – равенство работ;}$$

$$S_1 h_1 = S_2 h_2 \text{ – равенство объемов.}$$

Закон Архимеда

На тело, погруженное в жидкость (газ), действует *выталкивающая сила* $\overline{F}_\text{A}$ (или *сила Архимеда*), численно равная весу жидкости (газа) в объеме $V_\text{п}$ погруженной



части тела, направленная вертикально вверх и приложенная к центру тяжести жидкости, которая находилась бы в объеме $V_п$:

$$F_А = \rho_ж V_п g,$$

где $\rho_ж$ – плотность среды (жидкости или газа), в которой находится тело.

На тело, находящееся в жидкости, действуют две противоположно направленные силы: сила тяжести $m\overline{g}$ и сила Архимеда $\overline{F}_А$.

Условия плавания тел:

- если $F_А < mg$ $(\rho_{тела} > \rho_ж)$ – тело тонет;
- если $F_А = mg$ $(\rho_{тела} = \rho_ж)$ – тело плавает внутри жидкости на любой глубине (безразличное равновесие);
- если $F_А > mg$ $(\rho_{тела} < \rho_ж)$ – тело плавает на поверхности жидкости, причем

$$\rho_ж V_п = \rho_{тела} V,$$

где $V_п$ – объем погруженной части тела; V – объем тела.

Взвешивание в жидкости позволяет определять состав сплавов.

Водоизмещение судна – вес вытесняемой им воды. Водоизмещение равно силе тяжести, действующей на судно.

Если тело плавает на границе нескольких сред с плотностями $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$, то

$$F_A = (\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 + \ldots + \rho_n V_n) g,$$

где V_1, V_2, …, V_n – объемы частей тела, погруженных в разные среды.

При движении сосуда с жидкостью вертикально вниз с ускорением $\overline{a}$

$$F_A = \rho_ж V_п (g - a).$$

Если $\overline{a} = \overline{g}$, то $F_A = 0$.

Условие воздухоплавания летательных аппаратов (например, аэростатов, дирижаблей) $F_A \geq mg$ соблюдается, если плотность газа, наполняющего оболочку аппарата, меньше плотности воздуха.

Подъемная сила летательного аппарата – сила, численно равная разности между весом воздуха в объеме оболочки и весом легкого газа, заполняющего эту оболочку.

Гидродинамика

Идеальная жидкость – жидкость, в которой отсутствует трение между ее слоями и между жидкостью и стенками сосуда.

Движение жидкости (или *течение*) описывается полем скоростей, т.е. в каждой точке внутри жидкости задается скорость движения ее частиц.

Течение называется *стационарным*, если поле скоростей остается постоянным во времени.

Линия тока – кривая, вектор скорости в каждой точке которой направлен по касательной к ней.

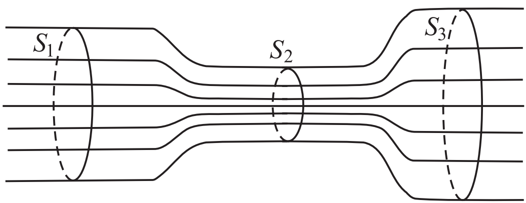
Уравнение неразрывности. При стационарном течении жидкости траектории движения ее частиц совпадают с линиями тока, причем масса жидкости, протекающей за единицу времени через любое поперечное сечение трубы, одинакова:

$$\rho v S = \mathrm{const}$$

или

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 = \rho_3 v_3 S_3,$$

где ρ – плотность жидкости.



Для однородной ($\rho = \text{const}$) несжимаемой (ρ не зависит от давления) жидкости

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 = v_3 S_3.$$

Уравнение Бернулли:

$$p_1 + \rho_1 g h_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \rho_2 g h_2 + \frac{\rho v_2^2}{2},$$

где p_1, p_2 – давления в двух разных точках на одной линии тока; h_1, h_2 – высоты этих точек, отсчитываемые от одного уровня; v_1, v_2 – скорости течения жидкости в этих точках.

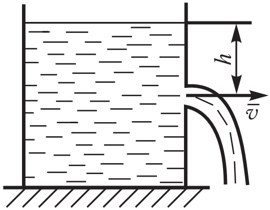
При движении идеальной жидкости ее механическая энергия сохраняется.

С энергетической точки зрения давление p численно равно работе внешних сил над единицей объема жидкости, а $\rho g h$ и $\frac{\rho v^2}{2}$ – соответственно потенциальной и кинетической энергии жидкости, заключенной в этом объеме.

Формула Торричелли:

$$v = \sqrt{2gh},$$

где v – скорость течения жидкости из небольшого отверстия, находящегося на глубине h.



Скорость жидкости, вытекающей из узкого отверстия, не зависит от плотности жидкости.

Модуль силы реакции F_p вытекающей струи, действующей на сосуд,

$$F_p = \rho S v^2 \quad \text{или} \quad F_p = 2gh\rho S,$$

где S – площадь отверстия; ρ – плотность жидкости.

8. Элементы релятивистской механики

Релятивистская механика – раздел классической физики, в котором рассматриваются законы движения тел со скоростями, сравнимыми со скоростью света.

Постулаты специальной теории относительности

Теоретической основой релятивистской механики является *специальная теория относительности* (СТО).

В основе СТО лежат два постулата Эйнштейна.

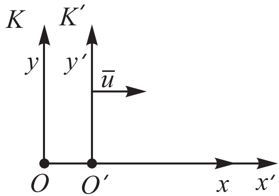
Принцип относительности. В любых инерциальных системах отсчета все физические явления протекают одинаково (при одинаковых начальных условиях).

П о с т о я н с т в о с к о р о с т и с в е т а. Во всех инерциальных системах отсчета скорость света в вакууме одинакова, т.е. не зависит от скоростей движения источника и приемника света.

Релятивистская кинематика

П р е о б р а з о в а н и я Л о р е н ц а. Если относительно системы отсчета $K(x, y, z, t)$ вдоль оси Ox движется со скоростью u система $K'(x', y', z', t')$, то:

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \qquad y = y', \qquad z = z', \qquad t = \frac{t' + \frac{ux'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$



Р е л я т и в и с т с к и й з а к о н с л о ж е н и я с к о р о с т е й. При движении частицы в положительном направлении сонаправленных осей Ox и $O'x'$

$$v = \frac{v' + u}{1 + \dfrac{v'u}{c^2}},$$

где v, v' – модули скорости частицы в системах отсчета K и K' соответственно.

При $v \ll c$ преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея:

$$x = x' + ut', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t', \quad \overline{v} = \overline{v}' + \overline{u}.$$

Релятивистские эффекты:

• *относительность одновременности*. События, произошедшие в разных точках x_1 и x_2 K-системы в одно и то же время, в K'-системе, движущейся относительно K-системы со скоростью $\overline{u} = (u, 0, 0)$, не будут одновременными $(t_1' \neq t_2')$;

• *относительность промежутков времени*. Если τ_0 – интервал времени между событиями, которые произошли в одной и той же точке K'-системы, движущейся относительно K-системы со скоростью $\overline{u} = (u, 0, 0)$, то интервал времени τ между этими же событиями, измеренный по часам K-системы, больше τ_0:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}};$$

• *относительность расстояний*. Под длиной l стержня в K-системе, относительно которой стержень длиной l_0 движется со скоростью $\overline{u} = (u, 0, 0)$ вместе с K'-системой, понимают расстояние между концами стержня, координаты которых измерены одновременно по часам K-системы:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}.$$

Релятивистская динамика

Закон взаимосвязи массы и энергии покоя. Если в системе отсчета, относительно которой частица покоится, ее масса равна m, то энергия покоя

$$E_0 = mc^2,$$

где c – скорость света в вакууме.

Полная энергия свободной частицы, движущейся со скоростью $\overline{v}$,

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Кинетическая энергия в СТО:

$$E_к = E - E_0 \quad \text{или} \quad E_к = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2.$$

Основное уравнение динамики в СТО:

$$\overline{p}'(t) = \overline{F},$$

где $\overline{p}$ – релятивистский импульс частицы:

$$\overline{p} = \frac{m\overline{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \overline{p} = \frac{E}{c^2}\overline{v}.$$

Связь между энергией, массой и импульсом релятивистской частицы:

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4, \quad p^2c^2 = E_к(E_к + 2mc^2).$$

9. Элементы квантовой механики

Квантовая механика описывает поведение микрообъектов (микрочастиц), линейные размеры которых меньше $10^{-8}-10^{-10}$ м, а массы – меньше 10^{-8} кг (массы Планка).

Законы квантовой механики имеют статистический (вероятностный) характер.

Состояние микрочастиц описывается волновой функцией, позволяющей определять вероятность нахождения частиц в данной точке пространства в данный момент времени.

Связь между *корпускулярными характеристиками* микрочастиц (энергией E и импульсом $\overline{p}$) и *волновыми* (частотой ν и длиной волны λ):

$$\nu = \frac{E}{h} \text{ (формула Планка);}$$

$$\lambda_{\text{Б}} = \frac{h}{p} \text{ (формула де Бройля),}$$

где $\lambda_{\text{Б}}$ – дебройлевская длина волны.

Соотношения неопределенностей Гейзенберга:

$$\Delta x \, \Delta p_x \geq h, \quad \Delta E \, \Delta t \geq h,$$

где Δx – неопределенность координаты микрочастицы; Δp_x – неопределенность проекции импульса микрочастицы; h – постоянная Планка; ΔE – изменение энергии; Δt – время, за которое произошло изменение энергии.

XV. ТЕПЛОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ

1. Основы молекулярной физики

Молекулярная физика – раздел физики, в котором изучаются физические свойства тел, особенности агрегатных состояний и процессы фазовых переходов между ними в зависимости от свойств и характера теплового движения атомов, ионов, молекул.

Основные понятия

Макросистема – система, состоящая из большого количества частиц (порядка $10^{19} - 10^{23}$ частиц на $1\ см^3$).

Молекулярная физика основана на статистическом методе исследования макросистем.

Микропараметры (координаты, скорость, импульс, энергия микрочастиц) описывают движение частиц макросистемы.

Макропараметры (температура, давление, объем, концентрация, плотность) характеризуют состояние системы частиц.

Задача статистического метода – установление связи между средними значениями микропараметров и макропараметрами.

Относительная молекулярная (*атомная*) *масса* M_r – отношение массы m_0 молекулы (атома) данного вещества к $\frac{1}{12}$ массы изотопа углерода $^{12}_{6}C$.

Моль – количество вещества, в котором содержится столько же частиц (молекул, атомов, ионов), сколько атомов содержится в 0,012 кг углерода.

Число Авогадро N_A – количество структурных элементов (атомов, молекул, ионов), содержащихся в 0,012 кг углерода.

Количество вещества

$$\nu = \frac{N}{N_A}, \quad [\nu] = 1\,\text{моль},$$

где N – количество частиц вещества.

В одном моле любого вещества содержится одинаковое количество частиц, равное числу Авогадро.

Молярная масса

$$M = \frac{m}{\nu}, \quad [M] = 1\,\frac{\text{кг}}{\text{моль}},$$

где m – масса вещества: $m = m_0 N$, $m = m_0 \nu N_A$.

Соотношение молярной и относительной молекулярной масс:

$$M = M_r \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}.$$

Равновесное состояние макросистемы характеризует *температура*.

Для измерения температуры пользуются разными шкалами, которые имеют набор реперных (опорных) точек и единицу – *градус*.

Шкала Цельсия образуется двумя реперными точками: $t = 0\ ^\circ\text{C}$ и $t = 100\ ^\circ\text{C}$ – температурами соответственно плавления льда и кипения воды при атмосферном давлении.

Шкала Кельвина имеет одну реперную точку – температуру тройной точки воды ($0{,}01\ ^\circ\text{C}$).

Температура по шкале Кельвина называется *абсолютной*.

Соотношение температур по шкале Кельвина (T) и Цельсия (t):

$$T = (t\ ^\circ\text{C} + 273), \quad [T] = 1\ \text{К (кельвин)}.$$

Абсолютная температура является мерой интенсивности хаотического движения молекул:

$$T = \frac{2E_\text{к}}{3kN},$$

где $E_\text{к}$ – кинетическая энергия поступательного движения N молекул; k – постоянная Больцмана.

Основные положения молекулярно-кинетической теории

Все вещества состоят из мельчайших частиц – молекул.

Молекулы находятся в непрерывном хаотическом движении.

Между молекулами действуют силы притяжения и силы отталкивания.

Простейшая модель молекулярно-кинетической теории – идеальный газ.

Идеальный газ – газ, размерами частиц которого и потенциальной энергией взаимодействия между ними можно пренебречь.

Свойства частиц идеального газа:

- движутся согласно законам классической механики;
- суммарный объем всех частиц мал по сравнению с объемом сосуда, в котором содержится газ;
- взаимодействуют друг с другом и со стенками сосуда посредством упругих соударений.

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории:

$$pV = \frac{2}{3}E_{к},$$

где p – давление газа; V – его объем; $E_{к} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \ldots + \frac{m_N v_N^2}{2}$ – суммарная кинетическая энергия поступательного движения N молекул.

Для однородного газа, масса молекул которого m_0,

$$E_к = \frac{m_0}{2}(v_1^2 + v_2^2 + ... + v_N^2).$$

Средняя квадратичная скорость поступательного движения молекул

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{1}{N}(v_1^2 + v_2^2 + ... + v_N^2)}.$$

Средняя квадратичная скорость движения молекул, выраженная через температуру T:

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}, \quad \langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3kTN_A}{M}}, \quad \langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}},$$

где $R = kN_A$ – *универсальная газовая постоянная*.

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории для давления p:

$$p = \frac{2}{3}\frac{E_к}{V}, \quad p = \frac{1}{3}nm_0\langle v_{кв} \rangle^2, \quad p = \frac{1}{3}\rho\langle v_{кв} \rangle^2,$$

где $n = \frac{N}{V}$ – концентрация газа; m_0 – масса молекулы; $\rho = \frac{m}{V} = nm_0$ – плотность газа.

Уравнение Клапейрона – Менделеева:

$$pV = \frac{m}{M}RT, \quad pV = \nu RT, \quad p = nkT,$$

$$pV = NkT, \quad pV = \nu N_A kT,$$

где p, V, m, M – давление, объем, масса и молярная масса газа соответственно; T – абсолютная температура; ν – количество молей.

Плотность идеального газа

$$\rho = \frac{pM}{RT}.$$

Уравнение Клапейрона. Если количество идеального газа не изменяется ($m = \text{const}$, $M = \text{const}$), то для любых двух равновесных состояний

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2},$$

где индексы 1 и 2 относятся к двум рассматриваемым состояниям газа.

Закон Авогадро. Равные объемы газа при одинаковых давлениях и температуре содержат равное количество молекул.

Закон Дальтона. Давление p смеси n химически нереагирующих газов равно сумме парциальных давлений $p_1, p_2, \ldots, p_n$ газов, образующих смесь:

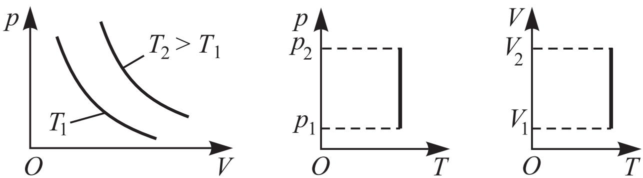
$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n,$$

где p_k – *парциальное давление*, которое создавал бы каждый из газов в объеме смеси при той же температуре.

Изопроцессы

Изопроцесс – процесс, который протекает в газе при неизменном его количестве $(\nu = \text{const})$ и постоянном значении одного из макропараметров (T, p или V).

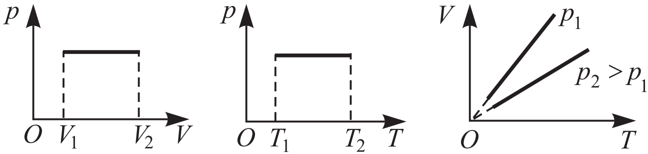
Изотермический процесс протекает при постоянной температуре; его график – *изотерма*:



Закон Бойля – Мариотта. При $\nu = \text{const}$, $T = \text{const}$

$$pV = \text{const}.$$

Изобарный процесс протекает при постоянном давлении; его график – *изобара*:

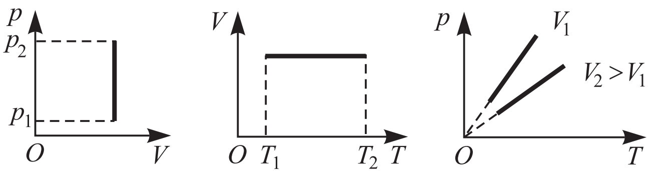


З а к о н Г е й - Л ю с с а к а. При $\nu = \text{const}$, $p = \text{const}$

$$\frac{V}{T} = \text{const} \quad \text{или} \quad V = V_0(1 + \beta \Delta T),$$

где V – объем газа при температуре T; V_0 – объем газа при температуре $T_0 = 273$ K; $\beta = \dfrac{1}{273}\,\text{K}^{-1}$ – температурный коэффициент объемного расширения для всех газов; $\Delta T = T - T_0$.

Изохорный процесс протекает при постоянном объеме; его график – *изохора*:



Закон Шарля. При $\nu = \text{const}$, $V = \text{const}$

$$\frac{p}{T} = \text{const} \quad \text{или} \quad p = p_0(1 + \gamma\Delta T),$$

где p – давление газа при температуре T; p_0 – давление газа при температуре $T_0 = 273$ K; $\gamma = \frac{1}{273}\,\text{K}^{-1}$ – температурный коэффициент давления для всех газов; $\Delta T = T - T_0$.

2. Основы термодинамики

Термодинамика – феноменологическая (описательная) теория тепловых процессов, в которой изучаются законы преобразования энергии макросистем без учета их микроскопического строения.

Термодинамическая система (ТДС) – совокупность большого количества частиц, обменивающихся энергией между собой и с внешними телами.

Состояние ТДС описывается термодинамическими параметрами:

- *экстенсивные параметры* – параметры, пропорциональные количеству вещества в системе (внутренняя энергия, объем);
- *интенсивные параметры* – параметры, не зависящие от количества вещества в системе (давление, температура).

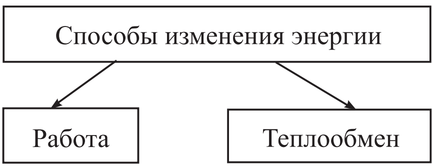
Энергия термодинамической системы

Энергия – всеобщая мера различных форм движения материи.

Полная энергия термодинамической системы

$$E = E_к + E_п + U,$$

где $E_к$ – кинетическая энергия макросистемы как целого; $E_п$ – потенциальная энергия во внешних силовых полях; U – внутренняя энергия, включающая энергию всех видов движения и взаимодействия частиц, образующих ТДС.



При совершении работы изменяется механическая и внутренняя энергия системы, при теплообмене (теплопередаче) – только внутренняя.

Теплообмен – процесс передачи внутренней энергии от одного тела к другому без совершения работы.

Различают три вида теплообмена: теплопроводность, конвекцию, излучение.

Внутренняя энергия идеального газа

$$U = \frac{i}{2}\nu RT \quad \text{или} \quad U = \frac{i}{2}pV,$$

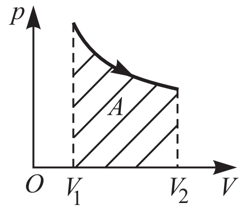
где i – *число степеней свободы* (или число независимых движений, которые может совершать молекула).

Для одноатомного идеального газа $i = 3$, для двух- и многоатомных молекул с жесткой связью между атомами $i = 5$ и $i = 6$ соответственно.

Изменение внутренней энергии идеального газа

$$\Delta U = \frac{i}{2}\nu R\Delta T \quad \text{или} \quad \Delta U = \frac{i}{2}(p_2V_2 - p_1V_1).$$

Изменение внутренней энергии не зависит от процесса перехода системы из одного состояния в другое.



Работа A, совершаемая термодинамической системой, численно равна площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой $p(V)$ на $p-V$-диаграмме.

Работа A', совершаемая над системой, численно равна и противоположна по знаку работе A.

Количество теплоты Q – количество внутренней энергии, передаваемое от одного тела другому при теплообмене.

Работа и количество теплоты зависят от процесса перехода термодинамической системы из одного состояния в другое.

Первое начало термодинамики

Если количество частиц в системе постоянно и не происходит изменения механической энергии системы как целого, то

$$Q = \Delta U + A,$$

т.е. количество теплоты Q, переданное системе, расходуется на увеличение ее внутренней энергии ΔU и совершение работы A над внешними телами.

Первое начало термодинамики – закон сохранения энергии в термодинамических процессах.

Первое начало термодинамики для изопроцессов:

- в изотермическом процессе

$$Q = A,$$

т.е. все количество теплоты, получаемое системой, расходуется на совершение работы (КПД процесса $\eta = \frac{A}{Q} = 1$), причем:

1) если $Q > 0$, то система совершает работу;

2) если $Q < 0$, то работа совершается над системой;

- в изохорном процессе

$$Q = \Delta U,$$

т.е. все количество теплоты, сообщенное системе, расходуется на изменение ее внутренней энергии (КПД процесса $\eta = 0$);

- в изобарном процессе

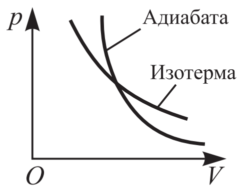
$$Q = \Delta U + A,$$

где $A = p\Delta V$ – работа, совершаемая системой при изменении ее объема (КПД процесса $0 < \eta < 1$).

Адиабатический процесс

Адиабатический (или *адиабатный*) *процесс* – процесс, происходящий в отсутствие теплообмена с окружающей средой:

$$Q = 0,\ \ A = -\Delta U.$$



При адиабатическом расширении ($A > 0$) система охлаждается ($\Delta U < 0$), при адиабатическом сжатии ($A < 0$) – нагревается ($\Delta U > 0$).

График адиабаты более «крутой», чем график изотермы, представляющий собой гиперболу (с ростом V убывает T).

Уравнение теплового баланса. В изолированной системе тел алгебраическая сумма количеств теплоты $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, отданных и полученных всеми n телами, участвующими в теплообмене, равна нулю:

$$Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n = 0.$$

Теплообмен прекращается при достижении термодинамического равновесия.

Теплоемкость

Теплоемкость тела

$$C = \frac{Q}{\Delta T}, \quad [C] = 1\,\frac{\text{Дж}}{\text{К}},$$

где Q – количество теплоты, полученное телом при изменении температуры на ΔT.

Удельная теплоемкость тела

$$c = \frac{C}{m}, \quad [c] = 1\,\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}},$$

где m – масса тела.

Молярная теплоемкость тела

$$C_{\text{м}} = cM, \quad [C_{\text{м}}] = 1\,\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}},$$

где M – молярная масса.

Теплоемкость газов зависит от вида процесса.

Молярная теплоемкость газов:

- в изохорном процессе

$$C_V = \frac{i}{2} R;$$

- в изобарном процессе

$$C_p = \frac{i+2}{2} R;$$

- в изотермическом процессе

$$C \to \infty;$$

- в адиабатическом процессе

$$C = 0.$$

Уравнение Майера:

$$C_p = C_V + R,$$

где R – универсальная газовая постоянная.

Тепловая машина

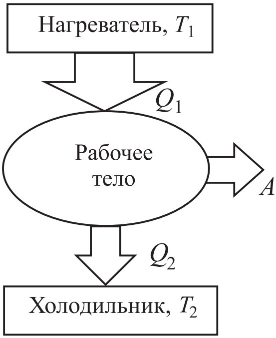
Тепловая машина (или *двигатель*) – устройство, в котором внутренняя энергия топлива превращается в работу.

При полном сгорании топлива массой m выделяется количество теплоты

$$Q = qm,$$

где q – *удельная теплота сгорания* топлива.

Тепловыми двигателями являются паровая машина, двигатель внутреннего сгорания, паровая и газовая турбины, реактивный двигатель.

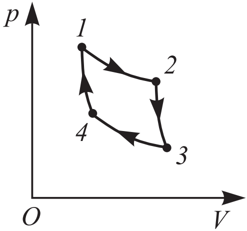


Принципиальная схема работы тепловой машины за цикл: от нагревателя (теплового резервуара с температурой T_1) поступает количество теплоты Q_1, которое частично преобразуется в полезную работу A, а частично (Q_2) передается холодильнику (тепловому резервуару с температурой T_2).

КПД тепловой машины

$$\eta = \frac{A}{Q_1} \quad \text{или} \quad \eta = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1}.$$

Максимальный теоретически возможный КПД при данных температурах T_1 и T_2 достижим в *идеальной тепловой машине*, работающей по ц и к л у К а р н о, состоящему из двух изотерм (*1–2* и *3–4*) и двух адиабат (*2–3* и *4–1*):



$$\eta_{\max} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1, T_2 – температуры нагревателя и холодильника соответственно.

В холодильной установке цикл проводится в обратном направлении.

Холодильный коэффициент ξ – КПД холодильной установки:

$$\xi = \frac{Q_2}{A} \quad \text{или} \quad \xi = \frac{Q_2}{|Q_1| - Q_2}.$$

Второе начало термодинамики

Невозможен циклический процесс, единственным результатом которого было бы выполнение работы за счет охлаждения теплового резервуара (формулировка Томсона).

Теплота не может самопроизвольно переходить от менее нагретого тела к более нагретому (формулировка Клаузиуса).

Второе начало термодинамики устанавливает направленность термодинамических процессов.

Фазовые переходы

Фаза – макроскопически однородная часть системы, отделенная границами от остальных ее частей.

Агрегатные состояния вещества – газообразное, жидкое, кристаллическое.

Фазовый переход – процесс изменения агрегатного состояния вещества.

Испарение (или *парообразование*) – фазовый переход из жидкого состояния в газообразное; обратный переход – *конденсация*.

Количество теплоты Q, которое изотермически поглощается при испарении или выделяется при конденсации вещества массой m,

$$Q = Lm,$$

где L – *удельная теплота парообразования*.

Кипение – процесс парообразования не только с поверхности, но и внутри жидкости.

Плавление – фазовый переход из кристаллического состояния в жидкое; обратный переход – *кристаллизация* (или *отвердение*).

Количество теплоты Q, которое изотермически поглощается при плавлении или выделяется при кристаллизации вещества массой m,

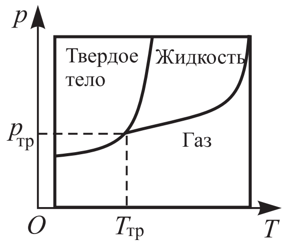
$$Q = \lambda m,$$

где λ – *удельная теплота плавления*.

Сублимация (или *возгонка*) – фазовый переход из твердого состояния в газообразное.

Фазовый переход происходит при определенных температуре и давлении.

Равновесие фаз изображается на фазовых $p-T$-диаграммах. Точка, в которой три фазы находятся в равновесии, – *тройная точка*.



Влажность

Насыщенный пар – газ, находящийся в динамическом равновесии с жидкостью: количества молекул, переходящих из жидкости в пар и обратно, в среднем равны (изотермическое сжатие или изохорное охлаждение приводит к превращению части этого газа в жидкость).

Давление насыщенного пара и его плотность не зависят от массы и объема пара. Они однозначно определяются температурой.

Абсолютная влажность ρ – масса водяного пара, содержащегося в 1 м^3 воздуха (или плотность пара).

Уравнение Клапейрона – Менделеева:

$$p = \frac{\rho}{M} RT,$$

где p – парциальное давление пара; ρ – абсолютная влажность; M – молярная масса воды.

Относительная влажность

$$\varphi = \frac{p}{p_\text{н}} \cdot 100\,\% \quad \text{или} \quad \varphi = \frac{\rho}{\rho_\text{н}} \cdot 100\,\%,$$

где p – парциальное давление паров воды, находящихся в воздухе при данной температуре; $p_\text{н}$ – парциальное давление насыщенного пара при той же температуре; ρ – абсолютная влажность; $\rho_\text{н}$ – плотность насыщенного пара.

Наиболее благоприятной для человека является относительная влажность воздуха 60–80%.

Точка росы – температура, при которой водяной пар в воздухе становится насыщенным.

Для определения влажности служат *гигрометры* и *психрометры*.

3. Поверхностные эффекты

Поверхностные эффекты – эффекты, возникающие на границе раздела веществ, находящихся в различных агрегатных состояниях.

Поверхностное натяжение

Поверхностная энергия $E_\text{пов}$ – дополнительная потенциальная энергия молекул, находящихся на поверхности жидкости, по сравнению с энергией молекул внутри жидкости.

Удельная поверхностная энергия

$$\sigma = \frac{E_{\text{пов}}}{S},$$

где S – площадь поверхности жидкости.

Сила $\overline{F}_{\text{пов. н}}$ *поверхностного натяжения* – сила притяжения между молекулами жидкости, направленная по касательной к ее поверхности и стремящаяся уменьшить площадь этой поверхности. В отсутствие внешних сил жидкость принимает форму фигуры с минимальной площадью поверхности – форму шара.

Коэффициент поверхностного натяжения

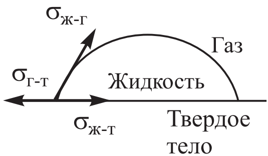
$$\sigma = \frac{F_{\text{пов. н}}}{l},$$

где l – длина линии, ограничивающей поверхностный слой.

Значение коэффициента поверхностного натяжения совпадает со значением удельной поверхностной энергии.

Смачивание

Форма поверхности жидкости вблизи границы трех сред (жидкости, газа и твердого тела) определяется соотношением их попарных коэффициентов поверхностного натяжения $\sigma_{\text{ж-г}}$, $\sigma_{\text{ж-т}}$, $\sigma_{\text{г-т}}$.

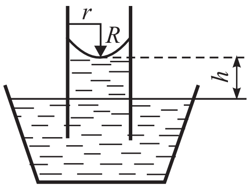


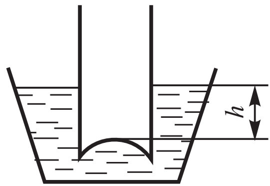
При полном смачивании жидкость растекается по поверхности, при несмачивании – стягивается в шарообразную каплю.

Капиллярные явления

Капиллярные явления заключаются в изменении уровня жидкости в узких трубках (*капиллярах*) по сравнению с уровнем жидкости в сообщающихся с ними сосудах.

Смачивание приводит к подъему жидкости в капиллярах, несмачивание – к опусканию.





Для полностью смачивающей (несмачивающей) жидкости плотностью ρ высота подъема (опускания) жидкости в капилляре радиусом r

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r},$$

где g – ускорение свободного падения.

Мениск – свободная поверхность жидкости, искривленная вблизи стенок сосуда.

Добавочное давление Δp обусловлено силами поверхностного натяжения, направленными к центру кривизны изогнутой поверхности. Для сферической поверхности радиусом R

$$\Delta p = \pm \frac{2\sigma}{R},$$

где знак «+» соответствует вогнутому мениску, а знак «–» – выпуклому.

XVI. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

1. Электрический заряд

Электродинамика – раздел физики, в котором изучается электромагнитное взаимодействие заряженных тел.

*Электромагнитное пол*е – форма материи, посредством которой осуществляется взаимодействие электрически заряженных частиц и тел.

Электрический заряд q – физическая величина, определяющая электромагнитное взаимодействие и являющаяся мерой этого взаимодействия; $[q] = 1$ Кл (кулон).

Носители электрических зарядов – электроны, протоны и другие элементарные частицы.

Свойства электрического заряда:

• *инвариантность* – абсолютное значение заряда не зависит от скорости движения тел;

• *знакопеременность* – если тело имеет избыток электронов, то его называют отрицательно заряженным ($q < 0$); если у тела недостаток электронов, то оно заряжено положительно ($q > 0$);

• *дискретность* – заряд тела выражается целыми кратными значениями элементарного заряда e:

$$q = n\mathrm{e} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Точечный заряд – заряженное тело, формой и размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь.

Заряженное тело можно представить как систему точечных зарядов.

Истинное дискретное распределение зарядов в заряженном теле заменяют фиктивным непрерывным распределением, характеризуемым плотностью зарядов:

• *объемная плотность заряда*

$$\rho = \frac{\Delta q}{\Delta V}, \quad [\rho] = 1\,\frac{\text{Кл}}{\text{м}^3};$$

• *поверхностная плотность заряда*

$$\sigma = \frac{\Delta q}{\Delta S}, \quad [\sigma] = 1\,\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2};$$

- *линейная плотность заряда*

$$\lambda = \frac{\Delta q}{\Delta l}, \quad [\lambda] = 1\,\frac{\text{Кл}}{\text{м}}.$$

З а к о н с о х р а н е н и я э л е к т р и ч е с к о г о з а р я д а. В электрически изолированной системе (не обменивающейся зарядами с внешними телами) сумма зарядов остается неизменной при любых процессах, происходящих в этой системе.

2. Электростатическое поле в вакууме

Закон Кулона

Электростатика – раздел электродинамики, в котором рассматриваются электрические поля, создаваемые неподвижными зарядами.

Основная задача электростатики – определение силовой (напряженность) и энергетической (потенциал) характеристик поля по заданному распределению зарядов.

Пробный заряд q_0 – точечный, малый по величине заряд, который практически не искажает исследуемое поле.

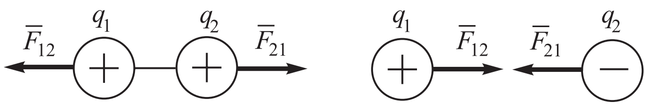
З а к о н К у л о н а. Сила $\overline{F}$ взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов q_1 и q_2 в вакууме прямо пропорциональна произведению модулей зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними и направлена вдоль прямой, соединяющей заряды.

Сила $\overline{F}$ называется *силой Кулона*. Ее модуль

$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2},$$

где $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot 10^9\ \dfrac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2}$; $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \dfrac{\text{Ф}}{\text{м}}$ – электрическая постоянная.

Одноименные заряды отталкиваются, разноименные – притягиваются:



Закон Кулона описывает также взаимодействие равномерно заряженных тел сферической формы, расстояние между центрами которых равно r.

Напряженность и потенциал электростатического поля

Напряженность $\overline{E}$ – векторная величина:

$$\overline{E} = \frac{\overline{F}}{q_0}, \quad [E] = 1\,\frac{\text{Н}}{\text{Кл}} = 1\,\frac{\text{В}}{\text{м}},$$

где $\overline{F}$ – сила, действующая на пробный заряд q_0, помещенный в данную точку поля.

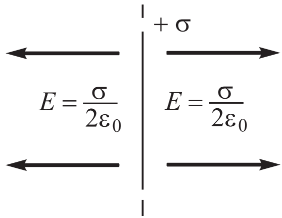
Модуль напряженности поля точечного заряда q на расстоянии r от него

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}.$$

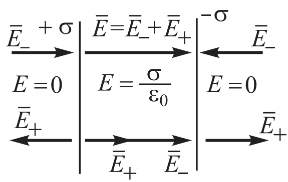
Электростатическое поле, напряженность которого одинакова во всех точках некоторого объема, называется *однородным* в этом объеме.

Однородные электростатические поля:

• поле бесконечной плоскости, равномерно заряженной зарядом с поверхностной плотностью σ;



• поле между обкладками плоского конденсатора.



Электростатическое поле является *потенциальным*: работа силы этого поля при перемещении заряда не зависит от формы траектории, а в случае замкнутого контура равна нулю.

Потенциал φ *электростатического поля* в данной точке – скалярная величина:

$$\varphi = \frac{W}{q}, \quad [\varphi] = 1\,\frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = 1\,\text{В},$$

где W – потенциальная энергия заряда q.

Работа A сил электростатического поля по переносу заряда равна убыли потенциальной энергии:

$$A = W_1 - W_2 \quad \text{или} \quad A = q(\varphi_1 - \varphi_2),$$

где $\varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов (напряжение U_{12}) между двумя точками электростатического поля.

Потенциал определяется с точностью до постоянной величины, которую для системы зарядов конечных размеров полагают равной нулю на бесконечном расстоянии от системы.

В однородном электрическом поле

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = Ed,$$

где d – расстояние, измеряемое вдоль линии напряженности $\bar{E}$.

Потенциал φ поля точечного заряда q на расстоянии r от него:

$$\varphi = k\frac{q}{r} \ (\varphi = 0 \text{ при } r \to \infty).$$

П р и н ц и п   с у п е р п о з и ц и и. Напряженность $\overline{E}$ (потенциал φ) поля системы n точечных зарядов в некоторой точке электростатического поля равна сумме напряженностей $\overline{E}_1, \overline{E}_2, \ldots, \overline{E}_n$ (потенциалов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$) полей, создаваемых в этой точке каждым из зарядов в отдельности:

$$\overline{E} = \overline{E}_1 + \overline{E}_2 + \ldots + \overline{E}_n, \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n.$$

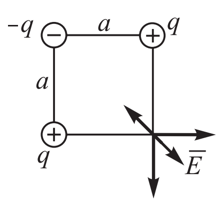
Напряженность (потенциал) системы зарядов, распределенных на протяженных телах, может быть вычислена с использованием формул для напряженности (потенциала) поля точечного заряда и принципа суперпозиции.

Напряженность (потенциал) некоторых систем зарядов:

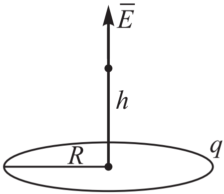
• напряженность E (потенциал φ) в вершине квадрата со стороной a, в других трех вершинах которого расположены заряды q:

$$E = \frac{kq}{a^2}\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right),$$

$$\varphi = Ea\sqrt{2};$$



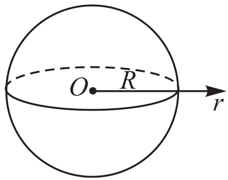
• напряженность (потенциал) поля кольца радиусом R, по которому равномерно распределен заряд q, на расстоянии h от центра кольца:



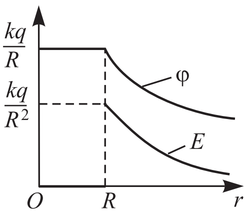
$$E = \frac{kqh}{(R^2 + h^2)^{3/2}},$$

$$\varphi = \frac{kq}{\sqrt{R^2 + h^2}};$$

• напряженность $\overline{E}$ (потенциал φ) заряженного зарядом $q > 0$ проводящего шара радиусом R на расстоянии r от центра шара:



$$E = \begin{cases} 0, & \text{если } r < R, \\ \dfrac{kq}{R^2}, & \text{если } r = R, \\ \dfrac{kq}{r^2}, & \text{если } r > R, \end{cases}$$



$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{kq}{R}, & \text{если } r \le R, \\ \dfrac{kq}{r}, & \text{если } r > R. \end{cases}$$

Графическое изображение электростатического поля

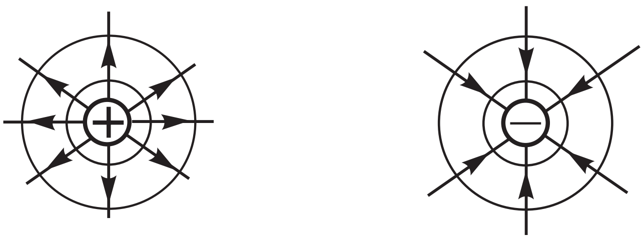
Графически электростатическое поле можно представить с помощью силовых линий и (или) эквипотенциальных поверхностей.

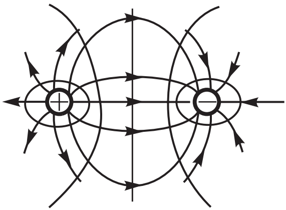
Силовые линии (или *линии напряженности*) – линии, касательные к которым в каждой точке пространства совпадают по направлению с вектором $\bar{E}$.

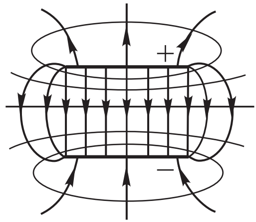
Силовые линии начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных (или уходят в бесконечность).

Эквипотенциальные поверхности – геометрическое место точек электростатического поля, в которых значения потенциалов одинаковы.

Силовые линии перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям:

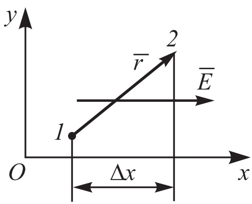






Вектор $\overline{E}$ всегда направлен в сторону уменьшения потенциала.

Для однородного электростатического поля



$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\Delta x},$$

где Δx – проекция вектора $\overline{r}$, соединяющего точки *1* и *2*, на направление $\overline{E}$; $\varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов в этих точках.

Энергия системы электрических зарядов

$$W_{\text{сист}} = W_{\text{внеш}} + W_{\text{собст}}.$$

Здесь $W_{\text{внеш}}$ – энергия взаимодействия n зарядов системы с внешним электрическим полем:

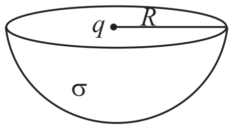
$$W_{\text{внеш}} = q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2 + ... + q_n\varphi_n,$$

где φ_k – потенциал внешнего поля в точках расположения зарядов q_k; $W_{\text{собст}}$ – энергия взаимодействия зарядов системы друг с другом:

$$W_{\text{собст}} = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1^{\text{собст}} + q_2\varphi_2^{\text{собст}} + ... + q_n\varphi_n^{\text{собст}}),$$

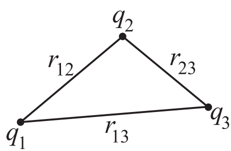
где $\varphi_k^{\text{собст}}$ – потенциал, создаваемый всеми зарядами системы, кроме q_k, в точке, в которой находится заряд q_k.

В частности:



• энергия взаимодействия заряженной полусферы радиусом R, на которой заряд распределен с поверхностной плотностью σ, и точечного заряда q, расположенного в центре полусферы,

$$W = kq\sigma 2\pi R;$$



• собственная потенциальная энергия взаимодействия системы из трех зарядов (q_1, q_2, q_3)

$$W_{\text{собст}} = k\frac{q_1q_2}{r_{12}} + k\frac{q_1q_3}{r_{13}} + k\frac{q_2q_3}{r_{23}}.$$

Энергия однородного электрического поля в вакууме, заключенного в объеме V:

$$W = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} V,$$

где ε_0 – электрическая постоянная; E – напряженность поля.

Объемная плотность энергии электрического поля в вакууме

$$w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

Энергия электрического поля, созданного системой зарядов, тождественно равна потенциальной энергии взаимодействия этих зарядов.

3. Электростатическое поле в веществе

Электростатическое поле в диэлектриках

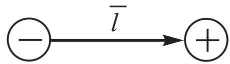
Диэлектрик – среда, через которую проникает электрическое поле.

Диэлектрики не проводят электрический ток, поскольку у них нет свободных зарядов.

Под действием внешнего электрического поля происходит *поляризация* диэлектриков, т.е. смещение в противоположных направлениях разноименных *связанных зарядов*, входящих в состав атомов или молекул.

Электрический диполь – система двух связанных одинаковых по модулю положительного и отрицательного зарядов q.

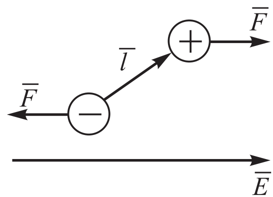
Вектор $\overline{l}$ – *плечо диполя.*



Электрический дипольный момент диполя

$$\overline{p} = q\overline{l}, \quad [p] = 1\ \text{Кл} \cdot \text{м}.$$

Во внешнем электрическом поле на диполь действует пара сил, стремящихся повернуть диполь в направлении поля.



В однородных изотропных диэлектриках сила взаимодействия точечных зарядов уменьшается в ε раз:

$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2},$$

где ε – диэлектрическая проницаемость вещества, показывающая, во сколько раз поле в диэлектрике меньше, чем в вакууме.

Объемная плотность энергии электрического поля в однородном диэлектрике:

$$w = \frac{W}{V}, \quad w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

Проводники в электростатическом поле

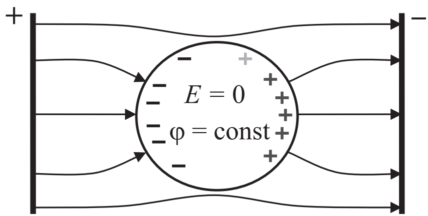
Проводник – вещество, в котором под действием электрического поля возникает упорядоченное движение заряженных частиц.

Электростатическая индукция – явление разделения разноименных зарядов в проводнике, помещенном в электростатическое поле.

Напряженность электростатического поля внутри проводника равна нулю.

Потенциал электростатического поля внутри и на поверхности проводника одинаков.

Силовые линии перпендикулярны к поверхности проводника.



Электроемкость уединенного проводника

$$C = \frac{q}{\varphi}, \quad [C] = 1\,\frac{\text{Кл}}{\text{В}} = 1\ \text{Ф (фарад)},$$

где q – заряд проводника; φ – его потенциал.

Электроемкость проводника зависит от его размеров, формы и диэлектрической проницаемости окружающей среды (но не зависит от заряда!).

Электроемкость проводящего шара радиусом R, находящегося в однородном изотропном диэлектрике с диэлектрической проницаемостью ε,

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R.$$

Энергия заряженного проводника:

$$W = \frac{C\varphi^2}{2}, \quad W = \frac{q^2}{2C}, \quad W = \frac{q\varphi}{2},$$

где C – электроемкость; φ – потенциал; q – заряд проводника.

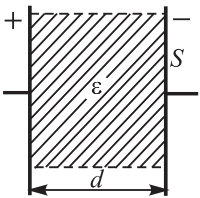
Конденсаторы

Конденсатор – система, состоящая из двух (или более) проводников (обкладок), разделенных слоем диэлектрика. В заряженном состоянии обкладки имеют одинаковые по величине и разные по знаку заряды (условное обозначение: ─┤├─).

Электроемкость конденсатора:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} \text{ или } C = \frac{q}{U},$$

где q – модуль заряда каждой обкладки; $\varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов (или напряжение U) между обкладками.



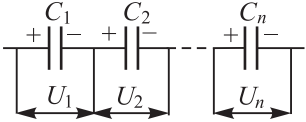
Электроемкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d},$$

где ε – диэлектрическая проницаемость диэлектрика; S – площадь каждой обкладки; d – расстояние между обкладками.

Несколько соединенных конденсаторов образуют *батарею*:

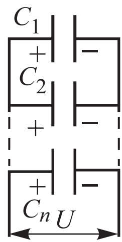
• при последовательном соединении n конденсаторов электроемкостями $C_1, C_2, ..., C_n$:



$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + ... + \frac{1}{C_n},$$

$$U = U_1 + U_2 + ... + U_n,$$

где C – электроемкость батареи, значение которой меньше, чем наименьшая емкость конденсатора, входящего в батарею; U – общее напряжение на батарее;



• при параллельном соединении n конденсаторов достигается увеличение емкости:

$$C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n;$$

напряжение U одинаково на всех конденсаторах.

Энергия заряженного конденсатора:

$$W = \frac{CU^2}{2}, \quad W = \frac{q^2}{2C}, \quad W = \frac{qU}{2}.$$

Энергия равна работе сторонних сил, которую необходимо затратить для зарядки конденсатора.

Работа A сил поля при изменении электроемкости конденсатора

$$A = W_1 - W_2.$$

В случае конденсатора, подключенного ($U = \text{const}$) к источнику тока,

$$A = \frac{U^2}{2}(C_1 - C_2).$$

В случае конденсатора, отключенного ($q = \text{const}$) от источника тока,

$$A = \frac{q^2}{2}\left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_2}\right).$$

4. Законы постоянного тока

Сила и плотность тока

Электрический ток – упорядоченное (направленное) движение электрически заряженных частиц.

За направление электрического тока принимают направление движения положительно заряженных частиц.

Сила постоянного электрического тока

$$I = \frac{q}{t}, \quad [I] = 1\ \text{А (ампер)},$$

где q – заряд, переносимый через поперечное сечение проводника за время t.

Плотность $\overline{j}$ тока – векторная величина:

$$\overline{j} = nq\langle\overline{v}\rangle,$$

где n – концентрация носителей заряда q; $\langle\overline{v}\rangle$ – средняя скорость их упорядоченного движения.

Модуль плотности тока

$$j = \frac{I}{S_\perp},$$

где I – сила тока в проводнике; $S_\perp$ – площадь его поперечного сечения, перпендикулярного к направлению упорядоченного движения заряженных частиц.

Электрическое сопротивление

Электрическое сопротивление (или *активное сопротивление*) R – величина, характеризующая противодействие проводника установлению в нем электрического тока (условное обозначение: ).

Для однородного проводника длиной l и поперечным сечением площадью S

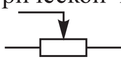
$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad [R] = 1\ \text{Ом},$$

где ρ – *удельное сопротивление*, характеризующее материал проводника; $[\rho] = 1\ \text{Ом} \cdot \text{м}$.

Зависимость удельного сопротивления ρ металлического проводника от температуры T (при не слишком низкой температуре) имеет линейный характер:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha \Delta T),$$

где ρ_0 – сопротивление проводника при температуре $T_0 = 273\ \text{K}$; α – температурный коэффициент сопротивления; $\Delta T = T - T_0$.

Для изменения сопротивления электрической цепи служит *реостат* (условное обозначение: ).

Электрическая проводимость – величина, обратная сопротивлению.

Удельная проводимость

$$\sigma = \frac{1}{\rho}, \quad [\sigma] = 1\ \text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}.$$

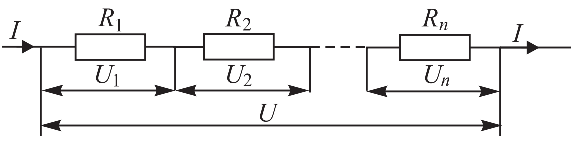
При последовательном соединении n проводников сопротивлениями $R_1, R_2, ..., R_n$:

- сила тока I одинакова во всех проводниках;
- общее напряжение

$$U = U_1 + U_2 + ... + U_n;$$

- общее сопротивление

$$R = R_1 + R_2 + ... + R_n.$$

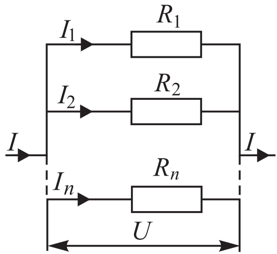


Если $R_1 = R_2 = ... = R_n$, то

$$R = nR_1.$$

При параллельном соединении n проводников сопротивлениями $R_1, R_2, ..., R_n$::

- напряжение U одинаково на всех проводниках;



• сила тока до и после разветвления цепи

$$I = I_1 + I_2 + ... + I_n;$$

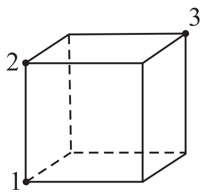
• общая проводимость

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ... + \frac{1}{R_n}.$$

Если $R_1 = R_2 = ... = R_n$, то

$$R = \frac{R_1}{n}.$$

Сопротивление сложной цепи вычисляется путем разделения ее на участки, содержащие только последовательно и параллельно соединенные проводники.

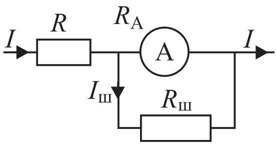


В частности, сопротивление проволочного куба, сопротивление каждого ребра которого R, включенного в цепь через различные контакты:

$$R_{12} = \frac{7}{12}R, \; R_{23} = \frac{3}{4}R, \; R_{13} = \frac{5}{6}R.$$

Измерение силы тока и напряжения

Для измерения силы тока применяют *амперметр*. Его включают в цепь последовательно с участками, через которые проходит измеряемый ток.



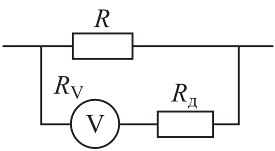
Для расширения предела измерения амперметра в n раз к нему параллельно подключают сопротивление $R_ш$, называемое *шунтом*:

$$R_ш = \frac{R_A}{n-1}.$$

Напряжение на однородном участке цепи

$$U = \frac{A}{q},$$

где A – работа сил поля по перемещению единичного положительного заряда q на этом участке.



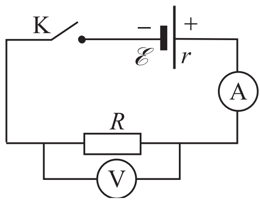
Для измерения напряжения применяют *вольтметр*, который включают в цепь параллельно тем точкам цепи, напряжение между которыми необходимо измерить.

Для расширения предела измерения напряжения вольтметром в n раз к нему последовательно подключают *дополнительное сопротивление* $R_д$:

$$R_д = R_V(n-1).$$

Закон Ома

Электрическая цепь состоит из источника тока, потребителей электроэнергии, измерительных приборов, соединительных проводов и ключа, служащего для замыкания и размыкания цепи.



Устройство, обеспечивающее поддержание постоянной разности потенциалов на концах участка цепи (для прохождения в нем постоянного тока), называют *источником постоянного тока* (условное обозначение: ).

Разность потенциалов на *полюсах* (клеммах, зажимах) источника постоянна вследствие работы *сторонних сил* (т.е. сил неэлектростатического происхождения), действующих внутри источника.

Сторонние силы переносят положительный заряд от отрицательного полюса (на котором потенциал меньше) к положительному (с бо́льшим потенциалом).

Электродвижущая сила (ЭДС) *источника тока*

$$\mathscr{E} = \frac{A_{\text{ст}}}{q}, \quad [\mathscr{E}] = 1\ \text{В},$$

где $A_{\text{ст}}$ – работа сторонних сил по переносу положительного заряда q по замкнутой цепи или по его участку.

Участок электрической цепи, не содержащий источников тока, называется *однородным*, а содержащий источники тока – *неоднородным*.

Напряжение на неоднородном участке цепи

$$U = \frac{A_{\text{эл}} + A_{\text{ст}}}{q} \quad \text{или} \quad U = (\varphi_1 - \varphi_2) \pm \mathscr{E},$$

где $A_{\text{эл}}$ – работа силы поля; $A_{\text{ст}}$ – работа сторонних сил.

Напряжение на зажимах источника:

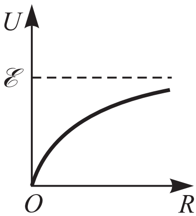
$$U = IR, \quad U = \frac{\mathscr{E}R}{R+r}, \quad U = \mathscr{E} - Ir,$$

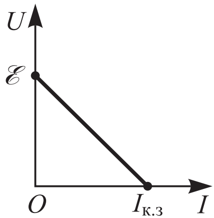
где r – внутреннее сопротивление источника.

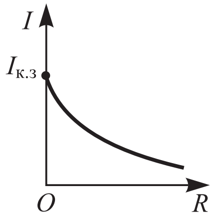
При разомкнутой цепи $(R \to \infty)$ $U_{\max} = \mathscr{E}$, $I = 0$.

При коротком замыкании источника тока $(R \ll r)$ $U_{\min} = 0$, а сила тока короткого замыкания

$$I_{\text{к.з}} = \frac{\mathscr{E}}{r}.$$







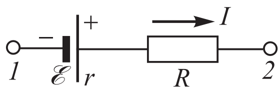
Закон Ома для однородного участка цепи:

$$I = \frac{U}{R}, \quad \bar{j} = \frac{1}{\rho}\bar{E},$$

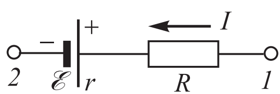
где I, $\bar{j}$ – сила и плотность тока соответственно; U – напряжение на участке цепи сопротивлением R; ρ – удельное сопротивление; $\bar{E}$ – напряженность поля.

Закон Ома для неоднородного участка цепи:

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}}{R + r},$$



$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) - \mathcal{E}}{R + r}.$$



Закон Ома для замкнутой (полной) цепи:

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R + r}.$$

При последовательном соединении n одинаковых источников тока

$$I = \frac{n\mathscr{E}}{R + nr}.$$

При параллельном соединении n одинаковых источников тока

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R + \frac{r}{n}}.$$

Работа и мощность постоянного тока

Работа A стационарного электрического поля, совершаемая при перемещении заряда q на однородном участке цепи сопротивлением R при напряжении U за время t:

$$A = qU, \quad A = IUt, \quad A = I^2 Rt, \quad A = \frac{U^2}{R}t.$$

На однородном участке цепи вся совершаемая работа преобразуется в теплоту.

Закон Джоуля – Ленца. Количество теплоты, выделяемое в проводнике за время t,

$$Q = I^2 Rt.$$

Полезная мощность P тока – мощность, развиваемая постоянным током на внешнем участке замкнутой цепи:

$$P = IU, \quad P = I^2 R, \quad P = \frac{U^2}{R},$$

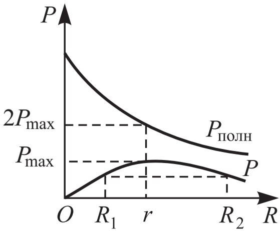
$$P = I(\mathscr{E} - Ir), \quad P = \frac{\mathscr{E}^2 R}{(R+r)^2}.$$

Максимальная полезная мощность $P_{\max}$ достигается при $R = r$:

$$P_{\max} = \frac{\mathscr{E}^2}{4r}.$$

Полная мощность, развиваемая источником в замкнутой цепи:

$$P_{\text{полн}} = I\mathscr{E}, \quad P_{\text{полн}} = I^2(R+r), \quad P_{\text{полн}} = \frac{\mathscr{E}^2}{R+r};$$

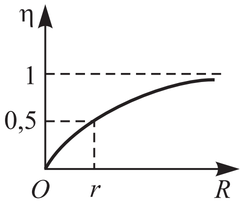


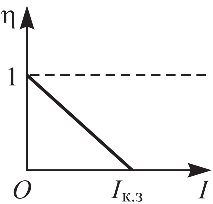
$$P_{max} = \frac{P_{полн}}{2} \text{ при } R = r.$$

Если $P(R_1) = P(R_2)$, то $r = \sqrt{R_1 R_2}$.

КПД источника тока:

$$\eta = \frac{P}{P_{полн}},\ \eta = \frac{U}{\mathscr{E}},\ \eta = \frac{R}{R + r}.$$





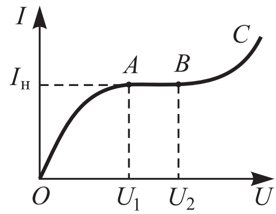
5. Электрический ток в различных средах

Электрический ток в газах

Газовый разряд – электрический ток в газах.

Ионизация – отрыв электронов от атомов или молекул.

Ионизационный потенциал равен разности потенциалов электрического поля, которую нужно приложить, чтобы сообщить электрону энергию, достаточную для



ионизации атома или молекулы при соударении с ним.

Рекомбинация – процесс, обратный ионизации.

Прохождение тока через газ, возникающее при внешнем воздействии (термической ионизации, фотоионизации газа), – *несамостоятельный газовый разряд* (участок *OB* на вольт-амперной характеристике).

При напряжении $U \geq U_1$ (участок *AB*) все заряженные частицы, образованные действием ионизатора, достигают электродов. Ток, соответствующий этому участку, называется *током насыщения* $I_н$.

Самостоятельный газовый разряд – разряд, происходящий без действия внешнего ионизатора (участок *BC*).

Типы самостоятельного газового разряда: тлеющий, искровой, дуговой, коронный.

При $U > U_2$ сила тока возрастает за счет *ударной ионизации* – отрыва электронов от атомов или молекул в результате столкновения с *вторичными электронами* (выбитыми с поверхности катода положительными ионами).

Процесс перехода несамостоятельного разряда в самостоятельный – *зажигание газового разряда* или *электрический пробой*, а соответствующее ему напряжение (U_2) – *напряжение зажигания* или *пробоя*.

Электрический ток в вакууме

Вакуум – разреженный газ, длина свободного пробега частиц которого соизмерима с размерами сосуда, где находится газ.

Вакуумные приборы – это диоды, триоды, электронно-лучевые трубки и др.

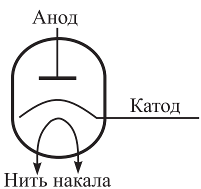
Ток в вакуумных приборах обусловлен *эмиссией* (испусканием) электронов с поверхности металла.

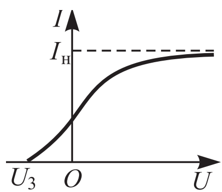
Условие вылета электрона из металла в вакуум (при термоэмиссии или фотоэмиссии):

$$W_{к} \geq e\Delta\varphi = A_{вых},$$

где $W_{к}$ – кинетическая энергия электрона; е – заряд электрона; $\Delta\varphi$ – разность потенциалов между поверхностью металла и вакуумом; $A_{вых}$ – работа выхода электрона из металла в вакуум.

Вакуумный диод – прибор, состоящий из двух электродов – нагреваемого катода и холодного анода, помещенных в вакуумированный баллон (лампу).





С возрастанием температуры T катода сила тока насыщения $I_{\text{н}}$ увеличивается.

Для преобразования переменного тока в постоянный используется свойство *односторонней проводимости* вакуумных диодов: если подать на анод отрицательное напряжение U, $|U| > U_{\text{з}}$ ($U_{\text{з}}$ – задерживающее напряжение), то прохождение тока прекратится.

Для управления током внутрь лампы вводят дополнительные электроды – *сетки*.

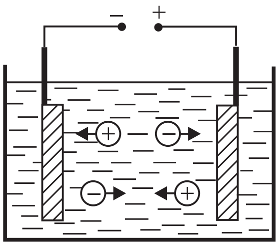
В *вакуумном триоде* управляющая сетка расположена вблизи катода, что позволяет управлять током с помощью малых напряжений, а также усиливать электрические сигналы.

Если в аноде вакуумного триода сделать отверстие, то через него пройдет пучок электронов, на управлении которым основано действие *электронно-лучевой трубки*.

Электрический ток в электролитах

Электролит – раствор (или расплав) веществ, в которых электрический ток обусловлен направленным движением ионов.

Электролитическая диссоциация – распад молекул вещества на ионы при растворении его в жидкости.



Электролиз – процесс выделения вещества на электродах при прохождении тока через электролит и, как следствие, изменение химического состава раствора.

Первый закон Фарадея (или закон электролиза). Масса m вещества, выделившегося на электроде, пропорциональна заряду q, прошедшему через электролит:

$$m = kq,$$

где k – *электрохимический эквивалент вещества*.

Для постоянного тока I

$$m = kIt,$$

где t – время прохождения тока через электролит.

Второй закон Фарадея. Электрохимический эквивалент пропорционален химическому эквиваленту $\frac{M}{n}$:

$$k = \frac{1}{F}\frac{M}{n},$$

где $F = eN_A$ – *постоянная Фарадея*, численно равная заряду, который должен пройти через электролит, чтобы на электроде выделился 1 моль одновалентного вещества; M – молярная масса вещества; n – валентность.

Электрический ток в твердых телах

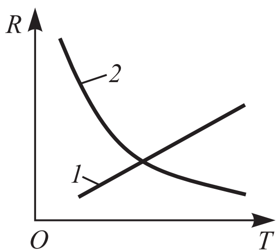
В твердых телах основными носителями зарядов являются электроны.

По величине электрической проводимости твердые тела подразделяются на:

- металлы ($\sigma = 10^6 - 10^8$ Ом$^{-1} \cdot$ м$^{-1}$);
- полупроводники ($\sigma = 10^{-8} - 10^6$ Ом$^{-1} \cdot$ м$^{-1}$);
- диэлектрики ($\sigma = 10^{-16} - 10^{-8}$ Ом$^{-1} \cdot$ м$^{-1}$),

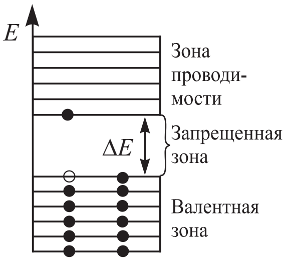
где $\sigma = \dfrac{1}{\rho}$ – удельная проводимость.

Металл – твердое тело с металлическим типом химической связи; *полупроводники* и *диэлектрики* – твердые тела с ионной и ковалентной связью соответственно.



Сопротивление металлов возрастает с увеличением температуры (*1*), а сопротивление полупроводников и диэлектриков, наоборот, уменьшается (*2*).

Различие в электрических свойствах металлов, полупроводников и диэлектриков объясняется зонной теорией твердых тел, описывающей энергетический спектр электронов в периодическом поле кристалла. По ширине запрещенной зоны различают диэлектрики ($\Delta E > 3$ эВ) и полупроводники ($\Delta E < 3$ эВ). В металлах $\Delta E = 0$.



Собственная проводимость – электропроводимость химически чистых полупроводников. Она обусловлена наличием свободных электронов в зоне проводимости и электронных вакансий (дырок) в валентной зоне.

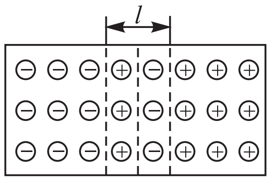
Примесная проводимость полупроводников возникает при внедрении в кристалл (*легировании*) примесных атомов, валентность которых отличается от валентности основных атомов.

Донорные примеси, имеющие бо́льшую валентность, создают электронную проводимость (*полупроводники n-типа*).

Акцепторные примеси, имеющие меньшую валентность, создают дырочную проводимость (*полупроводники p-типа*).

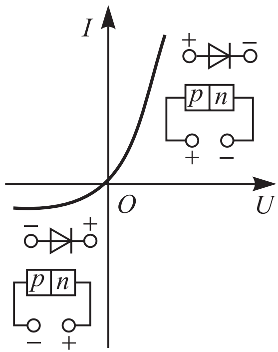
Область соприкосновения полупроводников *p*- и *n*-типа – *p–n-переход*.

На границе возникает двойной электрический (запирающий) слой толщиной l нескомпенсированных ионов акцептора и донора, электрическое поле которого прекращает диффузию электронов и дырок.



p–n-переход

Если при включении *p–n*-перехода в электрическую цепь внешнее поле противоположно полю запирающего слоя, то запирающая разность потенциалов уменьшается – *прямой ток* будет большим; при совпадении направлений внешнего поля и поля запирающего слоя сопротивление *p–n*-перехода увеличивается – *обратный ток* резко уменьшается.



Полупроводниковый диод – прибор, пропускающий ток в одном направлении. Его основной элемент – *p–n*-переход.

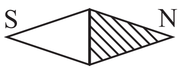
Для усиления электрических сигналов применяют *транзистор*, состоящий из трех последовательно соединенных полупроводников с двумя областями контакта (*n–p–n* или *p–n–p*).

6. Магнитное поле постоянного тока

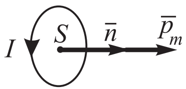
Магнитная индукция

Магнитное поле создается движущимися зарядами, проводниками с током, телами, обладающими магнитным моментом, и действует на эти же объекты.

Модуль и направление магнитного поля можно определить по его ориентирующему действию на магнитную стрелку или малый контур (рамку) с током, закрепленные на гибком подвесе:



N и S – северный и южный полюсы магнитной стрелки.



Магнитный момент контура

$$\overline{p}_m = IS\overline{n}, \quad [p_m] = 1\ \text{А} \cdot \text{м}^2,$$

где I – сила тока в контуре; S – площадь, охватываемая контуром; $\overline{n}$ – единичный вектор нормали к плоскости контура, направление которого связано с током правилом правого винта: совпадает с направлением поступательного движения винта, головка которого поворачивается «по току».

Магнитная индукция $\overline{B}$ – векторная величина, модуль B которой равен отношению максимального вращающего момента M_{max}, действующего на контур с током в магнитном поле, к модулю магнитного момента контура:

$$B = \frac{M_{max}}{p_m}, \quad [B] = 1\,\frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}} = 1\,\text{Тл (тесла)}.$$

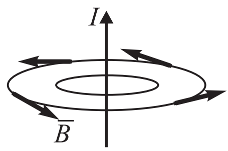
Направление вектора $\overline{B}$ совпадает с направлением вектора $\overline{n}$.

Магнитное поле графически изображают с помощью *линий магнитной индукции* – линий, касательные к которым совпадают с направлением вектора $\overline{B}$ в каждой точке поля.

В отличие от линий напряженности электростатического поля (являющегося потенциальным) линии магнитной индукции всегда замкнуты.

Магнитное поле является *вихревым*.

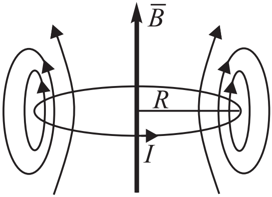
Магнитная индукция простейших конфигураций тока:



• модуль магнитной индукции поля бесконечного прямолинейного проводника на расстоянии r от него

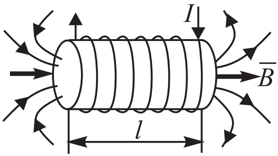
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

где μ_0 – магнитная постоянная; I – сила тока в проводнике;



• модуль магнитной индукции в центре кругового контура радиусом R, по которому проходит ток силой I,

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R};$$

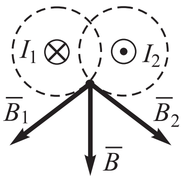


• модуль магнитной индукции внутри длинного *соленоида* (цилиндрической катушки, длина l которой значительно больше радиуса),

$$B = \mu_0 I \frac{N}{l},$$

где I – сила тока в соленоиде; N – количество витков обмотки соленоида.

П р и н ц и п с у п е р п о з и ц и и. Если магнитное поле $\overline{B}$ создается несколькими движущимися зарядами (или проводниками с токами), то вектор индукции результирующего магнитного поля в каждой точке находят в соответствии с *принципом суперпозиции*:



$$\overline{B} = \overline{B}_1 + \overline{B}_2 + ... + \overline{B}_n,$$

где $\overline{B}_k$ – вектор магнитной индукции поля, создаваемого в этой точке каждым зарядом (током) в отдельности.

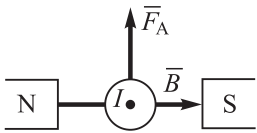
Сила Ампера

На прямолинейный участок проводника длиной l с током силой I, помещенного в магнитное поле с индукцией $\overline{B}$, действует *сила Ампера* $\overline{F}_\text{А}$, модуль которой

$$F_\text{А} = IlB\sin\alpha,$$

где α – угол между вектором $\overline{B}$ и проводником с током.

Направление вектора $\overline{F}_\text{А}$ определяют с помощью правила правого винта: направления тока, векторов $\overline{B}$ и $\overline{F}_\text{А}$ образуют правую тройку векторов.



Модуль вектора магнитной индукции

$$B = \frac{F_{\text{А}\max}}{Il}.$$

Действие сил Ампера на контур с током в магнитном поле используется в электродвигателях для преобразования электрической энергии в механическую.

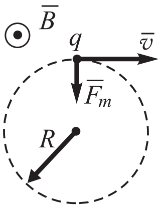
Сила Лоренца

На заряд q, движущийся со скоростью $\overline{v}$ в магнитном поле с индукцией $\overline{B}$, действует магнитная составляющая *силы Лоренца*, модуль которой

$$F_m = |q| vB \sin\alpha,$$

а ее направление определяется для $q > 0$ правилом правого винта ($\overline{v}$, $\overline{B}$ и $\overline{F}_m$ образуют правую тройку векторов); на отрицательный заряд сила Лоренца действует в противоположном направлении.

Магнитное поле не совершает работу над движущимся зарядом, так как действующая на заряд сила $\overline{F}_m$ всегда перпендикулярна к его скорости $\overline{v}$.



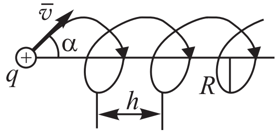
Если магнитное поле однородно и скорость заряженной частицы массой m перпендикулярна к вектору $\overline{B}$, то траекторией частицы является окружность радиусом

$$R = \frac{mv}{qB}.$$

Период вращения частицы по окружности

$$T = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Если скорость $\overline{v}$ частицы направлена под углом α к вектору $\overline{B}$, то траекторией движения частицы является винтовая линия радиусом



$$R = \frac{mv\sin\alpha}{qB}$$

с шагом

$$h = \frac{2\pi mv\cos\alpha}{qB}.$$

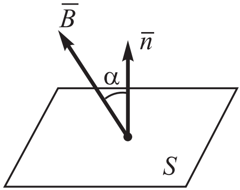
7. Электромагнитная индукция

Электромагнитная индукция – явление возникновения *индукционного тока* в проводящем контуре при изменении магнитного потока через поверхность, ограниченную этим контуром.

Закон электромагнитной индукции

Магнитный поток через плоскую поверхность площадью S

$$\Phi = BS\cos\alpha,$$

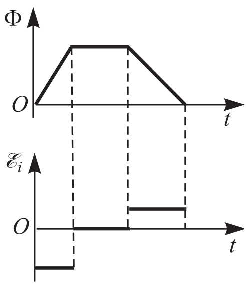


$$[\Phi] = 1\ \text{Тл} \cdot \text{м}^2 = 1\ \text{Вб (вебер)},$$

где α – угол между вектором $\overline{B}$ и нормалью $\overline{n}$ к поверхности S $(0 \le \alpha \le \pi)$.

Магнитный поток через замкнутую поверхность равен нулю.

З а к о н э л е к т р о м а г н и т н о й и н д у к ц и и (или з а к о н Ф а р а д е я). ЭДС индукции $\mathscr{E}_i$ в контуре прямо пропорциональна скорости изменения во времени магнитного потока, проходящего через поверхность, ограниченную контуром:



$$\mathscr{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \quad \mathscr{E}_i = -\Phi'(t).$$

При изменении магнитного потока в катушке, состоящей из N витков провода, возникает ЭДС индукции $\mathscr{E}_i$, в N раз бо́льшая, чем в одном витке:

$$\mathscr{E}_i = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Потокосцепление Ψ – полный магнитный поток через все витки:

$$\Psi = N\Phi.$$

Если контур, в котором индуцируется ЭДС, замкнут, то в нем возникает *индукционный ток*:

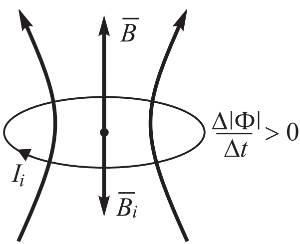
$$I_i = \frac{\mathscr{E}_i}{R},$$

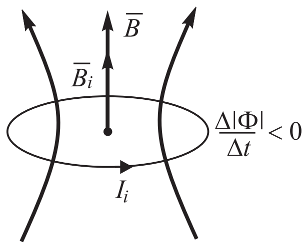
где R – сопротивление контура.

Модуль заряда, переносимого индукционным током,

$$\Delta q = \frac{|\Delta\Phi|}{R}.$$

П р а в и л о Л е н ц а. Индукционный ток всегда имеет такое направление, что его магнитное поле препятствует любым изменениям магнитного потока, вызывающим появление индукционного тока.



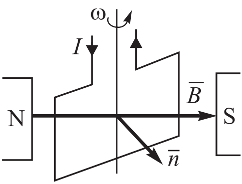


Природа ЭДС индукции:

• если изменение магнитного потока происходит вследствие изменения площади контура или изменения угла α (рамка вращается в магнитном поле), то индукционный ток в контуре обусловлен действием силы Лоренца $\overline{F}_m$ на свободные заряды в проводнике;

• если магнитный поток изменяется вследствие изменения во времени магнитного поля, в котором находится неподвижный контур, то возникновение индукционного тока обусловлено действием индуцированного *вихревого электрического поля*.

Примеры превращения механической энергии в электрическую:



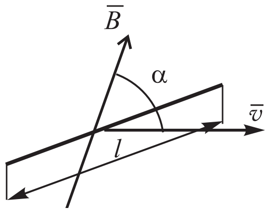
• ЭДС индукции, возникающая в рамке площадью S, содержащей N витков, при ее вращении в однородном магнитном поле индукцией $\overline{B}$ с угловой скоростью ω,

$$\mathscr{E}_i = NBS\omega \sin \omega t,$$

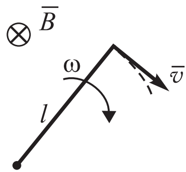
где $NBS\omega = \mathscr{E}_{i\,\max}$ – максимальное значение ЭДС;

• разность потенциалов на концах проводника (ЭДС индукции), которая возникает на проводнике длиной l, движущемся со скоростью $\overline{v}$ в однородном магнитном поле индукцией $\overline{B}$,

$$\Delta\varphi = Blv\sin\alpha,$$



где α – угол между направлением скорости $\overline{v}$ движения проводника и вектором $\overline{B}$;



• разность потенциалов на концах проводника (ЭДС индукции), возникающая в проводнике длиной l, который вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через один из его концов и ориентированной вдоль вектора $\overline{B}$ однородного магнитного поля,

$$\Delta\varphi = \frac{Bl^2\omega}{2}.$$

Явление самоиндукции

Собственный магнитный поток (магнитный поток Φ_s через поверхность, ограниченную контуром с током) пропорционален силе тока I в контуре:

$$\Phi_s = LI,$$

где L – *индуктивность контура*; $[L]=1\,\dfrac{\text{Вб}}{\text{А}}=1$ Гн (генри).

Индуктивность определяется размерами и формой контура, а также магнитными свойствами окружающей среды (но не зависит от силы тока в контуре).

Индуктивность соленоида

$$L=\mu\mu_0 n^2 V,$$

где μ – магнитная проницаемость среды; $n=\dfrac{N}{l}$ – количество витков, приходящихся на единицу длины l соленоида; N – общее количество витков соленоида; $V = Sl$ – объем соленоида; S – площадь его поперечного сечения.

Индуктивность контура является мерой его «инертности» по отношению к изменению силы тока в контуре.

Самоиндукция – возникновение ЭДС индукции в контуре, вызванное изменением собственного магнитного потока.

ЭДС самоиндукции

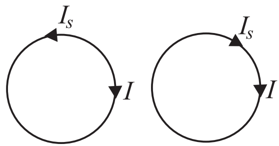
$$\mathscr{E}_s=-L\frac{\Delta I}{\Delta t}-I\frac{\Delta L}{\Delta t}\quad \left(\mathscr{E}_s=-\Phi_s'(t)\right),$$

где ΔI, ΔL – изменения соответственно силы тока в контуре и индуктивности контура за время Δt.

Если индуктивность контура постоянна, то

$$\mathscr{E}_s = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Направление тока самоиндукции I_s определяется с помощью правила Ленца: ток самоиндукции своим магнитным полем препятствует изменению силы тока в контуре.



$$\frac{\Delta I}{\Delta t} > 0 \qquad \frac{\Delta I}{\Delta t} < 0$$

Энергия магнитного поля

Проводник с индуктивностью L, по которому проходит ток силой I, обладает энергией:

$$W = \frac{LI^2}{2}, \quad W = \frac{\Phi_s I}{2}, \quad W = \frac{\Phi_s^2}{2I}.$$

Энергия магнитного поля в вакууме

$$W = \frac{B^2}{2\mu_0}V,$$

где V – объем, занятый полем.

Объемная плотность энергии магнитного поля в вакууме:

$$w = \frac{W}{V}, \qquad w = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

8. Магнитное поле в веществе

Отличие магнитного поля в веществе от поля в вакууме определяется наличием у заряженных частиц вещества магнитных моментов, которые обусловлены орбитальным движением электронов в атомах и их *спинами* (квантовой характеристикой микрочастиц).

Магнитные свойства вещества характеризуются *магнитной проницаемостью* μ, которая показывает, во сколько раз модуль индукции B магнитного поля в веществе отличается от модуля индукции B_0 магнитного поля в вакууме:

$$\mu = \frac{B}{B_0}.$$

По магнитным свойствам вещество делится на три класса:

- диамагнетики ($\mu < 1$);
- парамагнетики ($\mu > 1$);
- ферромагнетики ($\mu \gg 1$).

XVII. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

1. Колебания

Колебания – движения или процессы, повторяющиеся во времени.

Периодические колебания

Периодические колебания – колебания, при которых повторение процесса происходит через равные промежутки времени.

Период T периодических колебаний – наименьший промежуток времени, по истечении которого колебательная система возвращается в исходное положение:

$$T = \frac{t}{n},$$

где n – число колебаний за время t.

Частота ν периодических колебаний – число полных колебаний, совершаемых в единицу времени:

$$\nu = \frac{1}{T}, \quad [\nu] = 1\ \text{с}^{-1} = 1\ \text{Гц (герц)}.$$

Виды колебаний

В зависимости от физической природы колебательного процесса различают колебания:

- механические;
- электромагнитные;
- электромеханические.

В зависимости от характера воздействия на колебательную систему различают:

- *свободные* (или *собственные*) *колебания* – колебания, которые возникают в системе, выведенной из состояния устойчивого равновесия и предоставленной самой себе;
- *вынужденные колебания* – колебания под действием внешней периодической силы.

Свободные колебания бывают затухающими и незатухающими.

Затухающие колебания – колебания, амплитуда которых непрерывно уменьшается вследствие потерь энергии.

Частота свободных колебаний (или *собственная частота*) зависит только от параметров системы.

Частота установившихся вынужденных колебаний равна частоте вынуждающей силы.

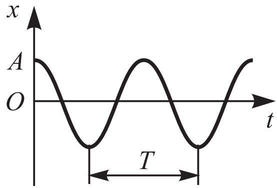
Резонанс – явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний, когда частота вынуждающей силы приближается к собственной частоте колебаний системы.

Гармонические колебания

Гармонические колебания – движения, при которых физические величины изменяются по закону синуса или косинуса.

Кинематическое уравнение гармонических колебаний:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_{01})$$



или

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_{02}),$$

где x – отклонение изменяющейся величины от положения равновесия.

Амплитуда колебаний A – максимальное отклонение от положения равновесия.

Фаза колебаний $\varphi = \omega t + \varphi_0$; $[\varphi] = 1$ рад.

Начальная фаза φ_0 – фаза колебаний в момент времени $t = 0$.

Циклическая (или *круговая*) *частота*:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \omega = 2\pi\nu. \quad [\omega] = 1\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Частота и период гармонических колебаний зависят от свойств колебательной системы.

Амплитуда и начальная фаза колебаний определяются начальными условиями (x_0 и v_0 в момент времени $t = 0$).

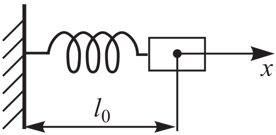
Любое сложное колебание можно представить как суперпозицию различных гармонических колебаний.

2. Механические колебания

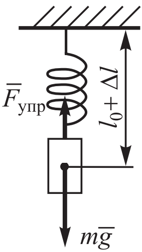
Механические колебания – поступательное или вращательное движение тела, повторяющееся во времени.

Пружинный маятник

Пружинный маятник – система, состоящая из тела массой m, прикрепленного к невесомой пружине с жесткостью k.



Пружинный маятник может быть горизонтальным и вертикальным. В горизонтальном маятнике положение равновесия определяется длиной l_0 недеформированной пружины, в вертикальном – длиной деформированной пружины при отсутствии колебаний $(k\Delta l = mg)$.



Период колебаний пружинного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Сила упругости, под действием которой тело совершает гармонические колебания, пропорциональна его смещению x от положения равновесия и направлена к положению равновесия:

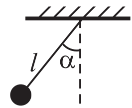
$$F_{\text{упр}} = -kx.$$

Динамическое уравнение гармонических колебаний:

$$ma = -kx \quad \text{или} \quad a = -\omega^2 x,$$

где $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ – циклическая частота собственных колебаний.

Математический маятник



Математический маятник – материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити длиной l и совершающая колебания в вертикальной плоскости под действием силы тяжести.

При малых углах отклонения от положения равновесия ($\alpha \le 10°$) колебания математического маятника будут гармоническими.

Период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

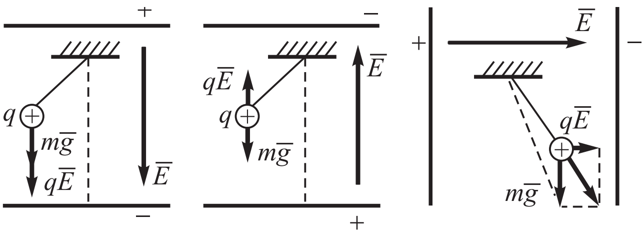
где g – ускорение свободного падения в рассматриваемой системе отсчета.

Если точка подвеса математического маятника движется с ускорением a, то период колебаний маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g^*}},$$

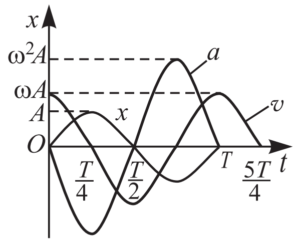
где g^* – «эффективное» ускорение маятника в системе отсчета, связанной с точкой подвеса; $g^* = g \pm a$ при движении точки подвеса с ускорением a, направленным вверх или вниз; $g^* = \sqrt{g^2 + a^2}$ при горизонтальном перемещении.

Если грузу маятника массой m сообщить заряд q, то в однородном электростатическом поле «эффективное» ускорение зависит от направления вектора напряженности $\overline{E}$ и его модуля:



$$g^* = g + \frac{qE}{m} \qquad g^* = g - \frac{qE}{m} \qquad g^* = \sqrt{g^2 + \left(\frac{qE}{m}\right)^2}$$

Скорость и ускорение при гармонических колебаниях



Если x – координата тела, совершающего гармонические колебания вдоль оси Ox по закону $x = A\sin\omega t$, то:

- проекция скорости

$$v_x = \omega A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

где $\omega A = A_v$ – амплитуда скорости;

- проекция ускорения

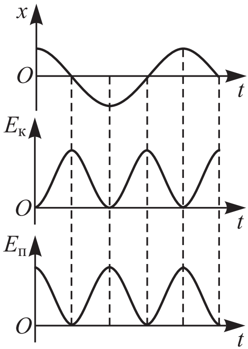
$$a_x = \omega^2 A \sin(\omega t + \pi),$$

где $\omega^2 A = A_a$ – амплитуда ускорения.

Скорость опережает смещение по фазе на $\frac{\pi}{2}$, ускорение и смещение находятся в противофазе.

Энергия при гармонических колебаниях

При гармонических колебаниях дважды за период происходит превращение кинетической энергии $E_к$ в потенциальную $E_п$, и наоборот.



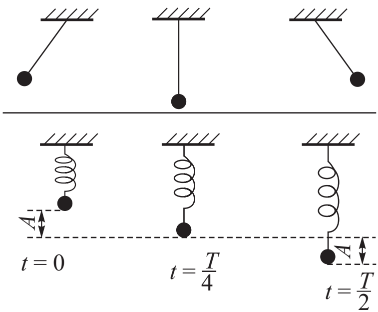
$$x = A\cos\omega t,$$

$$E_к = \frac{m\omega^2 A^2}{2}\sin^2 \omega t,$$

$$E_п = \frac{m\omega^2 A^2}{2}\cos^2 \omega t.$$

В момент наибольшего отклонения колеблющегося тела от положения равновесия скорость и $E_к$ равны нулю, а $E_п$ максимальна.

При прохождении положения равновесия скорость и $E_к$ максимальны, а $E_п = 0$.



Полная механическая энергия колеблющегося тела:

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}, \quad E = \frac{m\omega^2 A^2}{2}, \; E = \frac{kA^2}{2}.$$

3. Механические волны

Волна – процесс распространения колебаний в пространстве с конечной скоростью.

Классификация волн

Механическая (или *упругая*) *волна* – процесс распространения колебаний в упругой среде, который сопровождается переносом энергии от источника колебаний без переноса массы.

Продольная волна – волна, в которой частицы среды колеблются в направлении ее распространения. В этой среде возникают деформации растяжения и сжатия, возможные в твердых телах, жидкостях и газах.

Поперечная волна – волна, в которой частицы среды колеблются в направлении, перпендикулярном к направлению ее распространения. В этой среде возникает деформация сдвига, возможная только в твердых телах.

Волновой фронт – геометрическое место точек, до которых дошли колебания в данный момент времени.

Волновая поверхность – геометрическое место точек, в которых фаза колебаний имеет одно и то же значение (волновых поверхностей множество, волновой фронт в каждый момент времени только один).

В зависимости от геометрической формы волнового фронта различают *плоские* и *сферические волны*.

Скорость распространения волны – скорость движения волнового фронта.

Интенсивность I волны – величина, численно равная энергии, переносимой волной в единицу времени через единичную площадку $S_\perp$, ориентированную перпендикулярно к направлению распространения волны:

$$I = \frac{E}{S_\perp t}, \quad [I] = 1\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

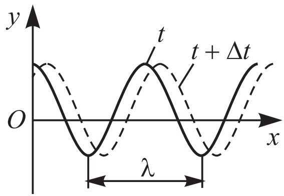
Интенсивность I волны пропорциональна квадрату амплитуды волны A^2.

Монохроматические волны

Монохроматическая волна – волна, в которой колебания частиц среды происходят по гармоническому закону.

Уравнение плоской монохроматической волны, распространяющейся вдоль оси Ox:

$$y(x, t) = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v}x\right),$$



где $y(x, t)$ – смещение частиц среды, в которой распространяется волна, от положения равновесия; A – амплитуда волны; v – скорость распространения волны; $\varphi(x, t) = \omega t - \frac{\omega}{v}x$ – фаза волны.

Разность фаз колебаний частиц среды, находящихся на расстояниях x_1 и x_2 от источника колебаний,

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{x_2 - x_1}{\lambda}.$$

Длина волны λ – расстояние между двумя ближайшими точками, колеблющимися с разностью фаз $\Delta\varphi = 2\pi$.

Связь между длиной волны λ, ее скоростью v и периодом T (или частотой) колебаний:

$$\lambda = vT \text{ или } \lambda = \frac{v}{\nu}.$$

Звуковые волны

Звуковые (или *акустические*) *волны* – упругие волны с частотой от 16 до 20 000 Гц, воспринимаемые органами слуха человека.

Скорость звука в воздухе 330 – 340 $\frac{м}{с}$.

Основной тон – звук с наименьшей частотой спектра звуковых колебаний.

Обертоны – частоты звука, кратные частоте основного тона.

Высота звука определяется частотой основного тона.

Тембр звука определяется количеством обертонов, их частотами и амплитудами.

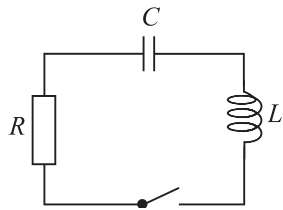
Громкость – субъективная характеристика звука, зависящая от его интенсивности и частоты.

4. Электромагнитные колебания

Электромагнитные колебания – периодические изменения во времени значений напряжения и силы тока в электрической цепи, а также обусловленные ими взаимосвязанные изменения электрического и магнитного полей.

Гармонические электромагнитные колебания

Свободные электромагнитные колебания – колебания, происходящие без потребления энергии от внешних источников.



Колебательный контур (*RLC*-цепочка) – электрическая цепь, содержащая соленоид с индуктивностью L, конденсатор емкостью C и резистор сопротивлением R.

Если сопротивление R мало ($R \to 0$), то колебательный контур называется *идеальным* (*LC*-цепочка), а возникающие в нем колебания будут гармоническими.

Формула Томсона для идеального колебательного контура:

$$T = 2\pi\sqrt{LC},$$

где T – период гармонических колебаний в идеальном колебательном контуре.

Если q – заряд, U – напряжение на обкладках конденсатора, то:

$$q = q_m \cos(\omega t + \varphi_0),$$
$$U = U_m \cos(\omega t + \varphi_0),$$

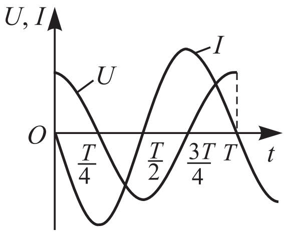
где q_m – амплитудное значение заряда; ω – циклическая частота колебаний; φ_0 – начальная фаза; $U_m = \dfrac{q_m}{C}$ – амплитудное значение напряжения.

Если I – сила тока в соленоиде, то:

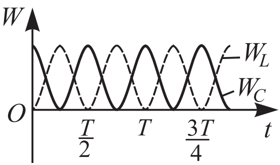
$$I = -q_m \omega \sin(\omega t + \varphi_0),$$

$$I = I_m \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right),$$

где $I_m = q_m \omega$ – амплитудное значение силы тока.



Колебания напряжения U и силы тока I происходят с одинаковой частотой (периодом), но со смещением по фазе на $\frac{\pi}{2}$.



При электромагнитных колебаниях в LC-контуре дважды за период происходит взаимопревращение энергии W_C электрического поля в конденсаторе и энергии W_L магнитного поля в соленоиде.

Полная энергия электромагнитных колебаний:

$$W = \frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2},$$

$$W = \frac{CU_m^2}{2}, \quad W = \frac{LI_m^2}{2},$$

где U – напряжение на конденсаторе; I – сила тока в соленоиде в произвольный момент времени; U_m, I_m – амплитудные значения напряжения и силы тока соответственно.

В реальном колебательном контуре $R \neq 0$, поэтому свободные колебания в нем являются затухающими.

Таблица аналогий между механическими и электромагнитными колебаниями:

x	v	m	k	$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$E_к = \frac{mv^2}{2}$	$E_п = \frac{kx^2}{2}$
q	I	L	$\frac{1}{C}$	$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	$W_L = \frac{LI^2}{2}$	$W_C = \frac{q^2}{2C}$

Переменный электрический ток

При воздействии на колебательный контур внешней периодической ЭДС в нем возникают *вынужденные электромагнитные колебания*, или *переменный ток*, периодически изменяющийся по величине и направлению.

В цепях синусоидального переменного тока мгновенные значения ЭДС $\mathscr{E}$, напряжения U и силы переменного тока I равны:

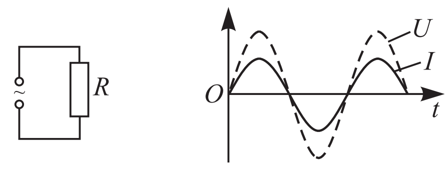
$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_m \sin \omega t, \quad U = U_m \sin \omega t, \quad I = I_m \sin(\omega t + \varphi),$$

где $\mathscr{E}_m, U_m, I_m$ – соответствующие амплитудные значения; φ – сдвиг фаз между током и напряжением.

Простейшие цепи переменного тока:

• в цепи, содержащей только резистор сопротивлением R, колебания силы тока совпадают по фазе с колебаниями напряжения:

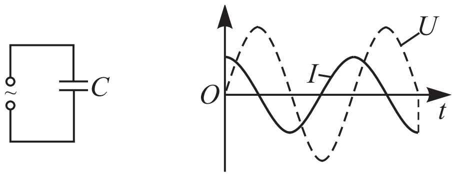
$$I = \frac{U}{R}, \quad I = \frac{U_m}{R} \sin \omega t;$$



• в цепи, содержащей только конденсатор емкостью C, колебания силы тока опережают колебания напряжения на конденсаторе на $\dfrac{\pi}{2}$:

$$I = \omega C U_m \cos \omega t, \quad I = \frac{U_m}{X_C} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

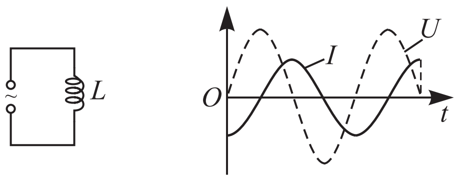
где $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ – емкостное сопротивление;



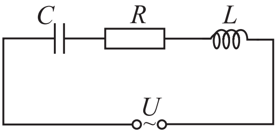
• в цепи, содержащей только соленоид с индуктивностью L, колебания силы тока отстают от колебаний напряжения на соленоиде на $\dfrac{\pi}{2}$:

$$I = \frac{U_m}{\omega L} \cos \omega t, \quad I = \frac{U_m}{X_L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

где $X_L = \omega L$ – индуктивное сопротивление.



Последовательная цепь переменного тока



В последовательной цепи переменного тока приложенное напряжение

$$U(t) = U_R(t) + U_C(t) + U_L(t);$$

сила тока $I(t)$ одинакова во всех трех элементах:

$$I(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Полное сопротивление последовательной RLC-цепи

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Закон Ома для амплитудных значений силы тока I_m и напряжения U_m:

$$I_m = \frac{U_m}{Z}.$$

Сдвиг фаз между напряжением и силой тока

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}.$$

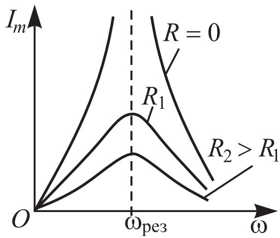
В последовательной цепи с малым активным сопротивлением возможен *резонанс* – явление резкого возрастания амплитуды колебаний силы тока при приближении частоты переменного тока к частоте свободных колебаний RLC-контура:

$$I_{m\,\max} = \frac{U_m}{R}.$$

Резонансная частота

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

совпадает с частотой свободных колебаний в контуре с малым R.

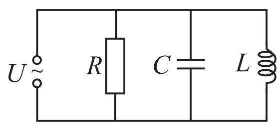


Одновременно с увеличением силы тока резко возрастает напряжение на конденсаторе и соленоиде (*резонанс напряжений*).

При резонансе сдвиг фаз между силой тока и напряжением равен нулю.

Параллельная цепь переменного тока

В параллельной цепи переменного тока приложенное напряжение одинаково во всех трех элементах:



$$U(t) = U_R(t) = U_C(t) = U_L(t);$$

сила тока

$$I(t) = I_R(t) + I_C(t) + I_L(t).$$

Амплитудное значение силы тока в параллельной цепи

$$I_m = U_m \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}.$$

Сдвиг фаз между напряжением и силой тока

$$\varphi = \operatorname{arctg} R\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right).$$

В параллельной цепи возможен *резонанс токов*: амплитудное значение силы тока I_m имеет минимум вблизи собственной частоты колебаний RLC-контура, а токи I_L и I_C сильно возрастают, отличаясь по фазе на π.

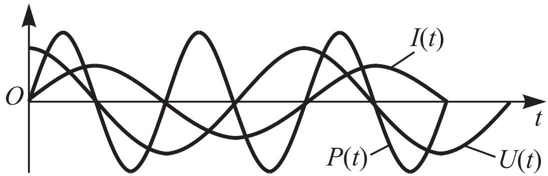
Мощность в цепи переменного тока

Мгновенная мощность переменного тока

$$P(t) = U(t)I(t).$$

Для гармонических токов и напряжений

$$P(t) = U_m I_m \cos\omega t \cos(\omega t + \varphi).$$



Средняя мощность переменного синусоидального тока

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_m U_m \cos\varphi,$$

где $\cos\varphi$ – сдвиг фаз между током и напряжением.

Действующие (или *эффективные*) *значения* силы тока $I_д$ и напряжения $U_д$ – соответствующие значения силы постоянного тока, который выделяет в той же цепи мощность, равную средней мощности переменного тока:

$$I_д = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad U_д = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

Потеря мощности в линии электропередачи на нагревание проводов

$$\Delta P = I_д^2 R,$$

где $R = \dfrac{2\rho l}{S}$ – сопротивление проводов линии передачи; ρ – удельное сопротивление материала проводов; l – длина линии; S – площадь поперечного сечения проводов.

Передаваемая мощность

$$P = I_д U_д \cos\varphi,$$

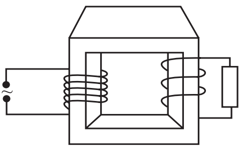
где $I_д$, $U_д$ – действующие значения силы тока и напряжения на линии передачи; $\cos\varphi = \dfrac{R}{Z}$ – *коэффициент мощности*.

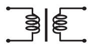
Чтобы уменьшить потери мощности

$$\Delta P = \frac{2\rho l P^2}{S U_д^2 \cos^2\varphi}$$

при заданных P, l и ρ, увеличивают $U_д$ и $\cos\varphi$.

Трансформаторы



Трансформатор – устройство, предназначенное для преобразования напряжения в цепи переменного тока (условное обозначение трансформатора: ).

Коэффициент трансформации

$$k = \frac{N_1}{N_2} \quad \text{или} \quad k = \frac{\mathscr{E}_1}{\mathscr{E}_2},$$

где N_1, N_2 – количество витков в первичной и вторичной обмотках, намотанных на ферромагнитный сердечник;

$\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2$ – действующие (или амплитудные) значения ЭДС индукции в этих обмотках.

При $k > 1$ трансформатор является *понижающим*, при $k < 1$ – *повышающим*.

Действующие (а также амплитудные) значения ЭДС, напряжения и силы тока в первичной и вторичной обмотках трансформатора связаны соотношениями:

$$U_1 = \mathscr{E}_1 + I_1 R_1, \quad \mathscr{E}_2 = U_2 + I_2 R_2,$$

где R_1, R_2 – активные сопротивления соответствующих обмоток.

Если $I_1 R_1 \ll \mathscr{E}_1$, то

$$k = \frac{U_1}{U_2 + I_2 R_2}.$$

При разомкнутой вторичной цепи (режим холостого хода)

$$k = \frac{U_1}{U_2}.$$

КПД η трансформатора равен отношению мощности, которая передается потребителю, к мощности, потребляемой от генератора переменного тока:

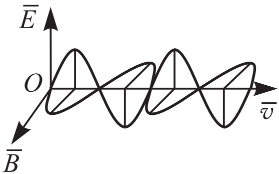
$$\eta = \frac{P_2}{P_1} \quad \text{или} \quad \eta = \frac{I_2 U_2}{I_1 U_1}.$$

В пренебрежении потерями (не превышающими 2 – 3%)

$$\frac{U_1}{U_2} \approx \frac{I_2}{I_1}.$$

5. Электромагнитные волны

Электромагнитная волна – процесс распространения колебаний электрического и магнитного полей в пространстве.



В монохроматической электромагнитной волне происходят гармонические колебания векторов $\overline{E}$ и $\overline{B}$.

Электромагнитные волны поперечны:

$$\overline{E} \perp \overline{B} \perp \overline{v}.$$

Электромагнитные волны могут распространяться не только в веществе, но и в вакууме со скоростью

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}},$$

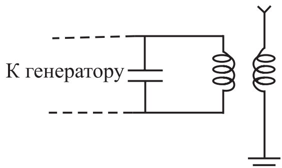
где ε_0, μ_0 – электрическая и магнитная постоянные соответственно.

Скорость электромагнитных волн в веществе с диэлектрической ε и магнитной μ проницаемостями:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad v = \frac{c}{n},$$

где n – *показатель преломления*.

Чтобы электромагнитные колебания, возникающие в колебательном контуре, распространялись в пространстве в виде электромагнитных волн, применяют *открытый колебательный контур*.



Длина волны, излучаемой контуром, и длина волны, на которую он резонирует,

$$\lambda = vT,$$

где T – период собственных колебаний контура.

Поляризация – нарушение осевой симметрии электромагнитной волны относительно направления распространения.

Линейно поляризованная (или *плоскополяризованная*) *волна* – волна, в которой колебания вектора $\bar{E}$ происходят в одной плоскости.

Циркулярно (или *эллиптически*) *поляризованная волна* – волна, в которой концы векторов $\overline{E}$ и $\overline{B}$ с течением времени описывают окружность (или эллипс).

Шкала электромагнитных волн:

<table>
<tr><th colspan="2">Диапазон волн</th><th>λ, м</th><th>ν, $с^{-1}$</th><th>Источники волн</th></tr>
<tr><td colspan="2">Радиоволны</td><td>$3 \cdot 10^{3}–5 \cdot 10^{-5}$</td><td>$10^{5}–6 \cdot 10^{12}$</td><td>Переменный ток</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Световые волны</td><td>инфракрасные</td><td>$5 \cdot 10^{-4}–7,6 \cdot 10^{-7}$</td><td>$6 \cdot 10^{11}–3,9 \cdot 10^{14}$</td><td rowspan="3">Переходы валентных электронов в атомах</td></tr>
<tr><td>видимый свет</td><td>$7,6 \cdot 10^{-7}–4 \cdot 10^{-7}$</td><td>$3,9 \cdot 10^{14}–7,5 \cdot 10^{14}$</td></tr>
<tr><td>ультрафиолетовые</td><td>$4 \cdot 10^{-7}–10^{-9}$</td><td>$7,5 \cdot 10^{14}–3 \cdot 10^{17}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Рентгеновское излучение</td><td>$2 \cdot 10^{-9}–6 \cdot 10^{-12}$</td><td>$1,5 \cdot 10^{17}–5 \cdot 10^{19}$</td><td>Электронные переходы в атомах</td></tr>
<tr><td colspan="2">γ-излучение</td><td>$10^{-10}–10^{-13}$</td><td>$3 \cdot 10^{18}–3 \cdot 10^{21}$</td><td>Ядерные превращения</td></tr>
</table>

XVIII. ОПТИКА

1. Предмет оптики

Оптика – раздел физики, в котором изучаются свойства света, а также законы его распространения и взаимодействия с веществом.

Свет – электромагнитные волны, длины которых заключены в интервале $10^{-9} - 10^{-4}$ м. Эта область спектра включает ультрафиолетовое, видимое (воспринимаемое человеческим глазом) и инфракрасное излучение.

Оптика состоит из трех частей: волновая оптика, геометрическая оптика, квантовая оптика.

2. Волновая оптика

Волновая оптика – раздел оптики, изучающий оптические явления, в которых проявляется волновая природа света.

Интерференция света

Интерференция света – перераспределение светового потока в пространстве с образованием устойчивой во времени *интерференционной картины* чередующихся максимумов и минимумов интенсивности при сложении двух или более световых волн.

Необходимым условием интерференции волн является их *когерентность* (или *согласованность*).

Когерентные волны – волны, имеющие одинаковую частоту и неизменную во времени разность фаз в каждой точке пространства.

Интерференция возникает при сложении когерентных волн, в которых колебания вектора $\overline{E}$ имеют одинаковые (или близкие) направления.

Оптическая разность хода интерферирующих волн

$$\Delta = n_2 s_2 - n_1 s_1,$$

где n_1, n_2 – показатели преломления сред, в которых волны распространяются по путям s_1 и s_2.

Связь между *разностью фаз* $\Delta\varphi$ и оптической разностью хода:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta \quad \text{или} \quad \Delta\varphi = \frac{\omega}{c}\Delta,$$

где λ – длина волны света в вакууме.

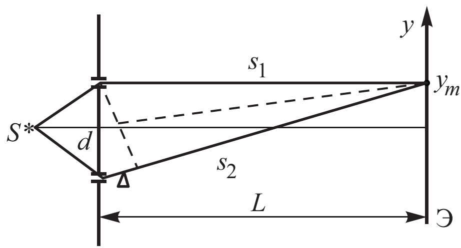
Распределение интенсивности в области наложения когерентных волн определяется значением оптической разности хода для каждой точки этой области.

В точках пространства, где

$$\Delta = m\lambda, \qquad \Delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda,$$

($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ – порядок интерференции), наблюдаются соответственно максимумы и минимумы интенсивности (светлые и темные полосы).

Интерференционную картину получают методом деления излучения источника на две волны (делением по волновому фронту или амплитуде) с последующим их наложением.

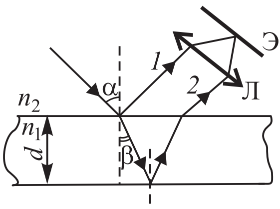


Деление волнового фронта реализуется в *опыте Юнга*. На экране Э наблюдается интерференция волн, проходящих через две близко расположенные щели, освещаемые источником S.

При $d \ll L$ координаты интерференционных полос:

$$y_{\max} = \pm \frac{m\lambda L}{d}, \quad y_{\min} = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda L}{d}.$$

Деление амплитуды реализуется при отражении света от тонких пленок.



При освещении тонкой пленки наблюдается интерференция волн, отраженных от верхней и нижней поверхностей. Оптическая разность хода волн *1* и *2*

$$\Delta = 2dn_1 \cos\beta + \frac{\lambda}{2}$$

или

$$\Delta = 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\alpha} + \frac{\lambda}{2},$$

где d – толщина пленки; n_1, n_2 – показатели преломления пленки и окружающей среды соответственно; α, β – углы падения и преломления; λ – длина волны в вакууме.

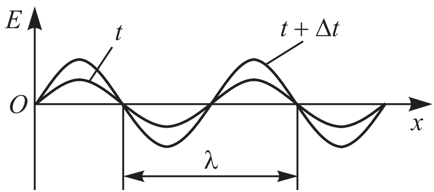
Дополнительное слагаемое $\frac{\lambda}{2}$ соответствует изменению фазы на π при отражении волны от оптически более плотной среды.

Если пленка плоскопараллельная, то возникают интерференционные *полосы равного наклона*, если клиновидная – *полосы равной толщины*.

Просветление оптики – ослабление света, отраженного от поверхностей оптических деталей (линз, призм) путем нанесения на них прозрачных пленок с показателем преломления n и минимальной толщиной

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4n}.$$

Стоячая волна – суперпозиция двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях и имеющих одинаковые частоты, амплитуды и направление колебаний.

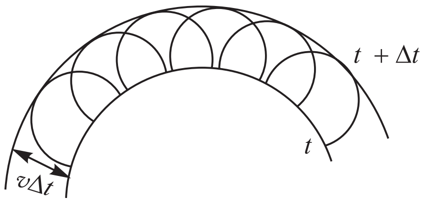


Стоячая волна не распространяется в пространстве и не переносит энергию.

Дифракция света

Дифракция света – явление отклонения световых волн от прямолинейного направления распространения.

П р и н ц и п Г ю й г е н с а – Ф р е н е л я. Каждая точка волновой поверхности является источником вторичных сферических волн, а значение интенсивности в любой точке наблюдения – результат интерференции когерентных вторичных волн.

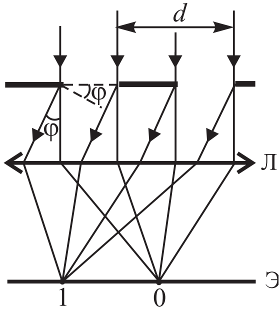


Дифракционная решетка – оптический прибор, который представляет собой совокупность большого количества узких щелей шириной b каждая, разделенных непрозрачными промежутками шириной a. Он служит для разложения света в спектр.

Период дифракционной решетки

$$d = b + a.$$

Формула дифракционной решетки для нормального падения монохроматического света с длиной волны λ:



$$d \sin \varphi = k\lambda,$$

где φ – угол дифракции, под которым наблюдаются *главные максимумы*; $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ – *порядок максимумов*.

Максимальный порядок дифракционного спектра

$$k_{\max} = \left[\frac{d}{\lambda} \right].$$

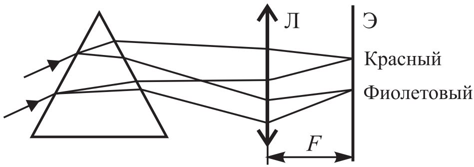
Количество главных максимумов интенсивности

$$N = 2k_{\max} + 1.$$

Дисперсия света

Дисперсия – зависимость абсолютного показателя преломления вещества от частоты световых волн.

Дисперсионный спектр – разложение белого света на отдельные составляющие (цвета) с помощью преломляющей призмы.



Различия между дифракционным и дисперсионным спектрами:

- в дифракционном спектре наблюдается несколько порядков спектра, а в дисперсионном – один спектр;
- в дифракционном спектре отклонение волн от первоначального направления растет с увеличением λ, а в дисперсионном – наоборот.

3. Геометрическая оптика

Геометрическая оптика – раздел оптики, в котором рассматриваются законы распространения света в прозрачных средах на основе представлений о свете как о совокупности световых лучей. Она представляет собой предельный случай волновой оптики, соответствующий переходу $\lambda \to 0$.

Законы геометрической оптики

Световой луч – линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением распространения световой энергии.

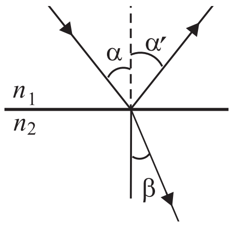
Основные законы геометрической оптики:

• *закон прямолинейного распространения света*: в однородной среде ($n = \text{const}$) световые лучи представляют собой прямые линии;

• *закон независимости световых лучей*: лучи при пересечении не возмущают друг друга;

• *закон отражения света*: падающий и отраженный лучи лежат в одной плоскости с нормалью, проведенной к отражающей поверхности в точке падения луча, причем углы между лучами и нормалью равны между собой (угол отражения α' равен углу падения α);

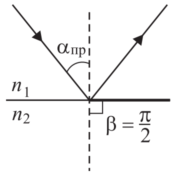
• *закон преломления света*: падающий и преломленный лучи лежат в одной плоскости с нормалью, проведенной к границе двух сред в точке падения луча, причем если α – угол падения, β – угол преломления, то



$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21},$$

где n_1, n_2 – абсолютные показатели преломления граничащих сред; $n_{21} = \dfrac{n_2}{n_1}$ – относительный показатель преломления второй среды относительно первой.

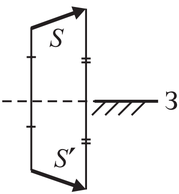
Среда с бóльшим показателем преломления называется *оптически более плотной*, с меньшим – *менее плотной*.



При распространении света из оптически более плотной среды ($n_1 > n_2$) и предельном угле падения $\alpha_{пр} = \arcsin\frac{n_2}{n_1}$ свет не проходит во вторую среду.

Полное внутреннее отражение происходит при падении луча из оптически более плотной среды под углом $\alpha \geq \alpha_{пр}$ (если $\alpha \to \alpha_{пр}$, то $\beta \to \frac{\pi}{2}$).

Построение изображений в зеркалах



Изображение S' предмета S в плоском зеркале З является мнимым, прямым, равным по размеру самому предмету и находится за зеркалом на том же расстоянии, что и предмет перед зеркалом.

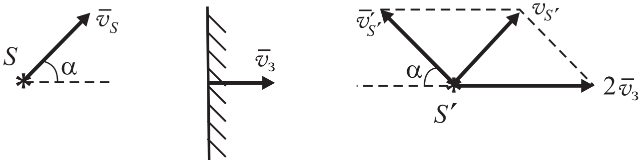
Предмет S и его изображение S' в неподвижном плоском зеркале движутся с одинаковой по модулю скоростью.

Если зеркало движется со скоростью $\overline{v}_з$ в направлении, перпендикулярном к плоскости зеркала, то изображение S' предмета S движется со скоростью $2\overline{v}_з$.

Если зеркало движется со скоростью $\overline{v}_з$, а предмет S – со скоростью $\overline{v}_S$, то скорость изображения

$$\overline{v}_{S'} = \overline{v}'_{S'} + 2\overline{v}_з,$$

где $\left|\overline{v}'_{S'}\right| = \left|\overline{v}_S\right|$.



Если зеркало повернуть на угол γ, то отраженный луч повернется на угол 2γ.

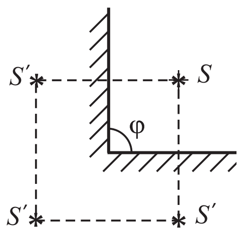
Если зеркало вращается с частотой ν, то отраженный луч вращается с удвоенной частотой.

В двугранном зеркале количество изображений

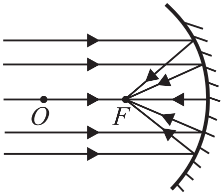
$$N = \frac{360}{\varphi} - 1,$$

где φ – угол между зеркалами.

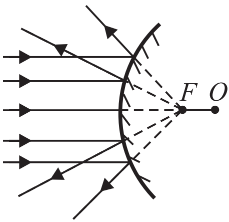
Сферическое зеркало – отражающая поверхность, имеющая форму сферического сегмента.



Оптический центр O зеркала – центр сферы радиусом R, из которой вырезан сегмент.



При падении лучей на *вогнутое сферическое зеркало* параллельный пучок сходится в точке F, называемой *фокусом зеркала*.

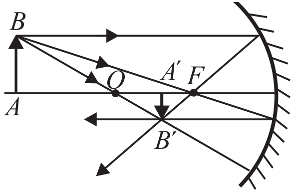


При падении лучей на *выпуклое сферическое зеркало* параллельный пучок расходится так, как если бы он исходил из фокуса F зеркала.

Ф о р м у л а с ф е р и ч е с к о г о з е р к а л а:

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}=\frac{2}{R},$$

где d, f – расстояния от зеркала до предмета и его изображения соответственно, которые считаются положительными в направлении хода лучей и отрицательными в обратном направлении; F – фокусное расстояние зеркала; R – радиус кривизны зеркала.



В вогнутом зеркале изображение предмета, расположенного между фокусом и оптическим центром, – мнимое, прямое, увеличенное, а за фокусом – действительное, обратное, уменьшенное.

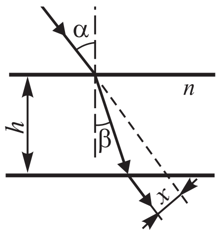
В выпуклом зеркале изображение всегда мнимое, прямое, уменьшенное.

Линейное увеличение k зеркала – отношение линейных размеров изображения и предмета:

$$k = \frac{|A'B'|}{|AB|} \text{ или } k = \frac{f}{d}.$$

Преломление света на плоских поверхностях

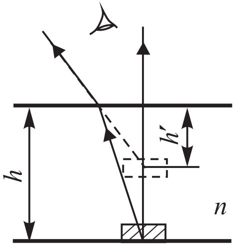
При прохождении света через плоскопараллельную пластинку выходящие лучи параллельны падающим.



Смещение луча при прохождении пластинки толщиной h:

$$x = h\left(\sin\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\right),$$

$$x = \frac{h\sin(\alpha - \beta)}{\cos\beta}.$$



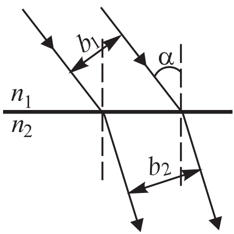
Кажущееся расстояние до предмета, который находится на расстоянии h в среде с показателем преломления n и наблюдается по нормали к плоской поверхности раздела,

$$h' = \frac{h}{n}.$$

В случае N слоев над предметом

$$h' = \frac{h_1}{n_1} + \frac{h_2}{n_2} + \ldots + \frac{h_N}{n_N},$$

где h_k – толщина k-го слоя; n_k – показатель преломления k-го слоя.

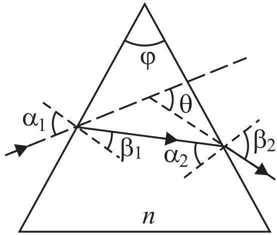


Изменение ширины пучка лучей при прохождении границы двух сред:

$$b_2 = b_1 \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \frac{n_2^2}{n_1^2}}}{\cos \alpha},$$

причем $b_2 > b_1$ при $n_1 < n_2$; $b_2 < b_1$ при $n_1 > n_2$.

Луч в трехгранной призме преломляется дважды. Угол φ между преломляющими гранями – *преломляющий угол призмы*.



Угол отклонения луча

$$\theta = \alpha_1 + \beta_2 - \varphi \quad (\varphi = \beta_1 + \alpha_2).$$

Угол θ имеет наименьшую величину при $\alpha_1 = \beta_2$ (и $\beta_1 = \alpha_2$):

$$\theta_{min} = 2\alpha_1 - \varphi.$$

Наибольшая величина угла φ, при которой свет еще проходит через преломляющие грани,

$$\varphi_{max} = 2\alpha_{пр},$$

где $\alpha_{пр}$ – предельный угол полного отражения.

При нормальном падении луча на грань призмы ($\alpha_1 = 0$)

$$\theta = (n-1)\varphi,$$

где n – показатель преломления.

Преломление света на сферических поверхностях

Сферическая линза – прозрачное тело, ограниченное с двух сторон сферическими поверхностями.

У *выпуклых* линз середина толще, чем края, у *вогнутых* – наоборот.

Линза называется *тонкой*, если ее толщина мала по сравнению с радиусами кривизны поверхностей.

Главная оптическая ось линзы – прямая, проходящая через центры сферических поверхностей.

Оптический центр линзы – точка на главной оптической оси, через которую свет проходит, не меняя своего направления.

Побочная оптическая ось – любая прямая (кроме главной), проходящая через оптический центр линзы.

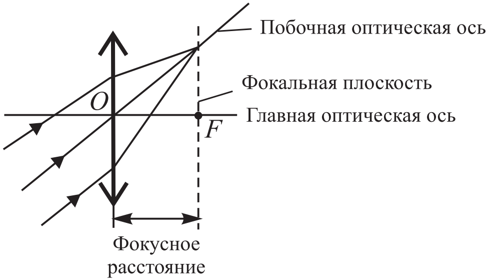
Фокус линзы – точка F, в которой пересекаются лучи, параллельные главной оптической оси (фокус *собирающей линзы* действительный) или их продолжения (фокус *рассеивающей линзы* мнимый).

Схематически собирающая линза изображается «↕», рассеивающая – «».

Фокусное расстояние линзы – расстояние от оптического центра линзы до фокуса, которое считают положительным для собирающей линзы и отрицательным для рассеивающей.

Фокальные плоскости – плоскости, проходящие через фокусы линзы перпендикулярно к главной оптической оси.

Параллельный пучок, падающий на линзу под углом к главной оптической оси, сходится в фокальной плоскости в точке ее пересечения с побочной оптической осью.



Оптическое изображение точки P – точка P', в которой в результате отражений и преломлений сходится пучок световых лучей, исходящий из точки P.

Изображение P' называется *действительным*, если в точке P' пересекаются лучи, и *мнимым* – если пересекаются продолжения лучей, проведенные в направлении, обратном направлению распространения света.

Изображением протяженного объекта является множество изображений его точек.

Центрированная оптическая система – система, состоящая из отражающих и преломляющих оптически однородных сред, разделенных сферическими поверхностями, центры кривизны которых лежат на одной оси – *главной оптической оси системы*.

Четкие изображения объектов получаются в *параксиальных пучках лучей*, составляющих небольшие углы с главной оптической осью.

Формула тонкой линзы:

$$\pm\frac{1}{d}\pm\frac{1}{f}=\pm\frac{1}{F},$$

где d, f – расстояния соответственно от предмета и изображения до линзы.

Если фокус, предмет или изображение является действительным, то перед соответствующими слагаемыми формулы тонкой линзы ставится плюс, если мнимыми – минус.

Оптическая сила D линзы – величина, обратная фокусному расстоянию F:

$$D=\frac{1}{F},\quad D=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right),\quad [D]=1\text{ дптр (диоптрия)},$$

где n – относительный показатель преломления; R_1, R_2 – радиусы кривизны поверхностей линзы.

Радиусы R_1 и R_2 считают положительными для выпуклых поверхностей и отрицательными для вогнутых.

Оптическая сила системы плотно прилегающих друг к другу линз равна алгебраической сумме оптических сил линз этой системы.

Линейное увеличение линзы:

$$\Gamma = \frac{H}{h}, \ \ \Gamma = \frac{f}{d},$$

где H, h – линейные размеры изображения и предмета соответственно.

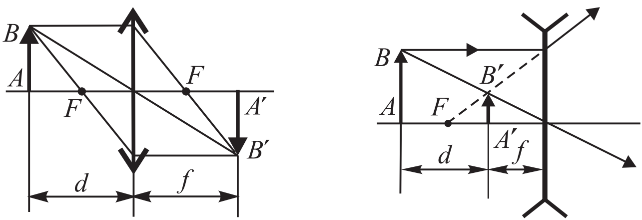
Увеличение лупы

$$\Gamma = \frac{d_0}{F},$$

где $d_0 = 25$ см – расстояние наилучшего зрения.

Построение изображения в линзах

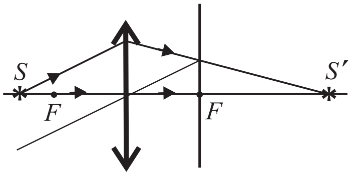
Для построения изображений используют лучи, ход которых после преломления в линзе известен:

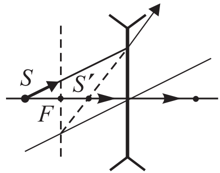


Характеристика изображения в линзах:

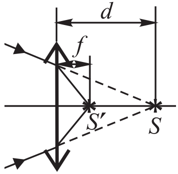
Тип линзы	d	f	Γ	Характеристика изображения
Собирающая	$d > 2F$	$F < f < 2F$	$\Gamma < 1$	Изображение действительное, перевернутое, расположено по другую (чем предмет) сторону линзы
	$d = 2F$	$f = 2F$	$\Gamma = 1$	
	$F < d < 2F$	$f > 2F$	$\Gamma > 1$	
	$d < F$	$\lvert f \rvert > F$	$\Gamma > 1$	Изображение мнимое, прямое, расположено по одну сторону с предметом
Рассеивающая	$d < F$ $F < d < 2F$ $d > 2F$	$\lvert f \rvert < F$	$\Gamma < 1$	Изображение мнимое, прямое, расположено по одну сторону с предметом (чем дальше предмет, тем меньше и ближе к фокусу изображение)

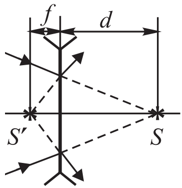
При построении изображения точечного источника S, расположенного на главной оптической оси, используют побочную оптическую ось, проведенную параллельно одному из падающих на линзу лучей:

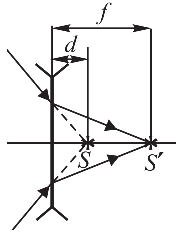




Формулы линзы для сходящихся пучков:







$$-\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F},\qquad -\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=-\frac{1}{F},\qquad -\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=-\frac{1}{F}.$$

Оптические приборы

Проекционный аппарат – предназначен для получения действительного увеличенного изображения предметов на экране.

Фотоаппарат – предназначен для получения на фотопленке уменьшенного действительного изображения предмета.

Телескоп – предназначен для наблюдения удаленных объектов; состоит из длиннофокусного объектива и короткофокусного окуляра.

Микроскоп – предназначен для наблюдения малых объектов, невидимых невооруженным глазом; состоит из короткофокусного объектива и длиннофокусного окуляра.

Глаз – сложная оптическая система, оптическая сила которой составляет $D \approx 59$ дптр (при расслабленной глазной мышце).

Аккомодация – способность глаза изменять оптическую силу при изменении расстояния до рассматриваемого предмета.

На сетчатке глаза возникает перевернутое изображение, но мозг воспроизводит прямое изображение.

Дефекты зрения: близорукий глаз имеет бóльшую оптическую силу, чем нормальный глаз, а дальнозоркий – меньшую.

Для коррекции зрения используют очки соответственно с рассеивающими и собирающими линзами.

4. Элементы квантовой оптики

Квантовая оптика – теория взаимодействия света и вещества, согласно которой свет поглощается и излучается порциями (квантами) с энергией

$$E = h\nu,$$

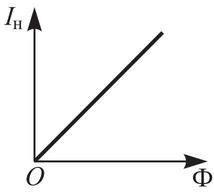
где h – постоянная Планка; ν – частота света.

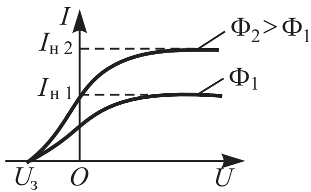
Внешний фотоэффект

Фотоэффект – явление испускания электронов поверхностью твердого тела под воздействием света.

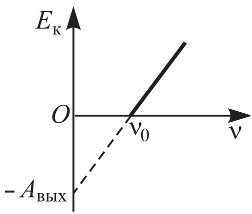
Законы фотоэффекта:

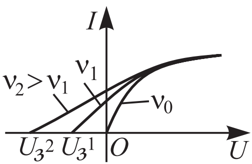
• максимальное количество фотоэлектронов, вылетающих из катода в единицу времени (сила тока насыщения $I_н$), пропорционально световому потоку Φ (мощности излучения);





• максимальная кинетическая энергия вылетающих электронов линейно зависит от частоты и не зависит от светового потока;





• при облучении поверхности светом с частотой, меньшей ν_0 (называемой *красной границей*), фотоэффект не наблюдается.

Согласно Эйнштейну энергия кванта $h\nu$, поглощаемая электроном вещества, расходуется на работу $A_{\text{вых}}$ выхода электрона из вещества и на сообщение ему кинетической энергии $E_{\text{к}} = \dfrac{mv_{\max}^2}{2}$:

$$h\nu = A_{\text{вых}} + \frac{mv_{\max}^2}{2}.$$

При $\nu = \nu_0$

$$h\nu_0 = A_{\text{вых}}.$$

Задерживающее напряжение $U_{з}$ – минимальное отрицательное напряжение, при котором фототок прекращается:

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = \mathrm{e}U_{з},$$

где e – заряд электрона.

Давление света

Электромагнитное излучение обладает импульсом и оказывает на поверхность вещества давление

$$p = \frac{I}{c(1+\rho)},$$

где I – интенсивность света; c – скорость света в вакууме; ρ – коэффициент отражения (равный отношению интенсивностей отраженной и падающей волн); для зеркальной поверхности $\rho = 1$.

XIX. АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

1. Атом

Атом – мельчайшая частица вещества (размером $\approx 10^{-11}$ м), являющаяся носителем его химических свойств.

Согласно планетарной модели в состав атома входят положительно заряженное ядро и электроны, движущиеся в электрическом поле ядра.

Квантовые постулаты Бора:

- существуют стационарные энергетические состояния атомов, находясь в которых, атом не излучает;
- при переходе атомов из одного стационарного состояния (с энергией E_n) в другое (E_m) происходит испускание или поглощение излучения с частотой

$$\nu_{nm} = \frac{|E_n - E_m|}{h},$$

где h – постоянная Планка.

Правило квантования орбит Бора для простейшей атомной системы – атома водорода:

$$mv_n r_n = n\frac{h}{2\pi} \quad (n \in \mathbf{N}),$$

где m – масса электрона; n – номер орбиты радиусом r_n, по которой электрон движется со скоростью v_n.

Радиусы r_n орбит и энергии E_n стационарных состояний атома водорода:

$$r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m \mathrm{e}^2} n^2, \quad E_n = -\frac{m\mathrm{e}^4}{8\varepsilon_0^2 h^2 n^2},$$

где e – заряд электрона.

Для *основного состояния* ($n = 1$):

$$r_1 = 5{,}28 \cdot 10^{-11} \text{ м}, \quad E_1 = -13{,}6 \text{ эВ (электронвольт)},$$

$$1 \text{ эВ} = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

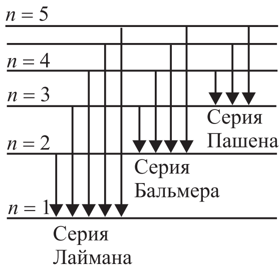
Возбужденные состояния – состояния с $n > 1$.

На энергетической диаграмме энергетическим состояниям соответствуют горизонтальные линии (*энергетические уровни*).

Частоты (длины волн) излучения в спектре атома водорода образуют ряд серий, каждой из которых соответствует определенное значение числа n и различные значения $k > n$:

$$\nu_{kn} = R'\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right),$$

$$\frac{1}{\lambda_{kn}} = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right),$$



где $R' = cR$, R – *постоянные Ридберга*; c – скорость света в вакууме.

2. Атомное ядро

В соответствии с протонно-нейтронной моделью атомное ядро (размером порядка $10^{-14} - 10^{-15}$ м) состоит из *протонов* (p) и *нейтронов* (n), называемых *нуклонами*.

Взаимодействие нуклонов в атомном ядре – проявление *сильного взаимодействия*, которое на два порядка интенсивнее электромагнитного взаимодействия.

Количество Z протонов в ядре (*зарядовое число*) равно порядковому номеру химического элемента в таблице Менделеева.

Заряд ядра

$$q = Z\mathrm{e},$$

где e – элементарный заряд, равный заряду протона.

Атомная единица массы (1 а.е.м.) равна $\frac{1}{12}$ массы атома изотопа углерода ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$:

$$1\ \text{а.е.м.} = 1{,}6606 \cdot 10^{-27}\ \text{кг} = 931{,}5\,\frac{\text{МэВ}}{c^2},$$

где c – скорость света в вакууме.

Массовое число – целое число A, ближайшее к значению атомной массы, выраженной в атомных единицах массы.

Массовое число равно сумме чисел протонов (Z) и нейтронов (N) в ядре:

$$A = Z + N.$$

Ядро любого элемента X символически обозначают ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$.

Изотопы – атомы, ядра которых имеют одинаковое число протонов и разное число нейтронов.

Атом водорода имеет три изотопа: протий ${}^{1}_{1}\mathrm{H}$, дейтерий ${}^{2}_{1}\mathrm{H}$ и тритий ${}^{3}_{1}\mathrm{H}$.

Дефект массы Δm – разность между суммарной массой всех нуклонов ядра в свободном состоянии и массой ядра:

$$\Delta m = Zm_{\text{p}} + (A - Z)m_{\text{n}} - M_{\text{я}}.$$

Сумма энергий покоя свободных протонов и нейтронов больше энергии покоя состоящего из них ядра.

Энергия связи ядра $E_{\text{св}}$ – минимальная энергия, которую нужно затратить для разделения ядра на входящие в него нуклоны. Такая же энергия выделяется при образовании ядра из свободных нуклонов:

$$E_{\text{св}} = \Delta mc^2.$$

Удельная энергия связи – энергия связи ядра, приходящаяся на один кулон.

3. Ядерные реакции

Ядерные реакции – преобразования атомных ядер, вызванные их взаимодействиями с элементарными частицами или другими ядрами.

Символическая запись ядерной реакции:

$${}_{Z}^{A}\text{X} + a \to {}_{\widetilde{Z}}^{\widetilde{A}}\text{Y} + b,$$

где ${}_{Z}^{A}\text{X}$, ${}_{\widetilde{Z}}^{\widetilde{A}}\text{Y}$ – соответственно исходное и конечное ядра с зарядовыми числами Z, $\widetilde{Z}$ и массовыми числами

A, $\widetilde{A}$; a, b – бомбардирующая и испускаемая частицы.

Энергетический выход Q ядерной реакции – энергия, которая высвобождается (или поглощается) при ядерной реакции:

$$Q = \big((m_1 + m_2 + \ldots) - (\tilde{m}_1 + \tilde{m}_2 + \ldots)\big) \cdot 931{,}5 \text{ МэВ},$$

где $(m_1 + m_2 + \ldots)$, $(\tilde{m}_1 + \tilde{m}_2 + \ldots)$ – суммарные массы покоя ядер и частиц до и после реакции соответственно, выраженные в а.е.м.

При $Q > 0$ ядерная реакция называется *экзотермической*, при $Q < 0$ – *эндотермической*.

Цепные реакции – ядерные реакции, продуктами которых являются частицы, вызывающие эти реакции.

Типичная цепная реакция – реакция деления урана под действием нейтронов:

$${}^{235}_{92}\text{U} + {}^{1}_{0}\text{n} \to {}^{144}_{56}\text{Ba} + {}^{89}_{36}\text{Kr} + 3\,{}^{1}_{0}\text{n}.$$

Термоядерный синтез – процесс слияния легких атомных ядер.

Типичная термоядерная реакция:

$${}^{2}_{1}\text{H} + {}^{3}_{1}\text{H} \to {}^{4}_{2}\text{H} + {}^{1}_{0}\text{n} \quad (Q = 17{,}6 \text{ МэВ}).$$

При любых ядерных реакциях соблюдаются законы сохранения энергии, импульса, электрического заряда (зарядового числа) и числа нуклонов (массового числа).

4. Радиоактивность

Радиоактивность – явление самопроизвольного превращения одних ядер в другие, сопровождающегося испусканием различных частиц.

Радиоактивный распад атомных ядер – одно из проявлений *слабого взаимодействия*, которое в 10^{10} раз слабее сильного взаимодействия.

Закон радиоактивного распада:

$$N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}},$$

где N – число нераспавшихся ядер к моменту времени t; N_0 – первоначальное количество ядер; T – *период полураспада* – промежуток времени, в течение которого распадается половина имеющихся ядер.

Типы радиоактивных излучений:

- α-частицы – ядра атомов гелия $\left({}_2^4\mathrm{He}\right)$:

$${}_Z^A\mathrm{X} \xrightarrow{\alpha\text{-распад}} {}_2^4\alpha + {}_{Z-2}^{A-4}\mathrm{Y};$$

• β-частицы – поток быстрых ($v = 0,99c$) электронов $\left({}_{-1}^{0}\mathrm{e}\right)$:

$$ {}_{Z}^{A}\mathrm{X} \xrightarrow{\beta\text{-распад}} {}_{-1}^{0}\mathrm{e} + {}_{Z+1}^{A}\mathrm{Y}; $$

• γ-излучение – высокочастотное электромагнитное излучение ($\nu > 10^{18}\ \mathrm{с}^{-1}$), при котором A и Z ядра не изменяются.

Активность радиоактивного вещества

$$ A = \left|\frac{\Delta N}{\Delta t}\right|,\ [A] = 1\ \text{Бк (беккерель)}, $$

где ΔN – количество ядер, распавшихся за время Δt.

Внесистемная единица активности – кюри (Ки); $1\ \text{Ки} = 3,70 \cdot 10^{10}\ \text{Бк}$.

Поглощенная доза излучения

$$ D = \frac{E}{m},\quad [D] = 1\,\frac{\text{Дж}}{\text{кг}} = 1\ \text{Гр (грей)}, $$

где E – энергия ионизирующего излучения, поглощенная облучаемым веществом массой m.

Внесистемная единица – рад (рад); $1\ \text{рад} = 0,01\ \text{Гр}$.

Экспозиционная доза излучения

$$ D_S = \frac{q}{m},\quad [D_S] = 1\,\frac{\text{Кл}}{\text{кг}}, $$

где q – суммарный заряд ионов одного знака, возникающих в сухом воздухе массой m.

Внесистемная единица – рентген (Р); $1\,\text{Р} = 2{,}58\times10$. $\times10^{-4}\,\dfrac{\text{Кл}}{\text{кг}}$.

Эквивалентная доза излучения

$$H = kD,\ [H] = 1\,\text{Зв (зиверт)},$$

где k – *коэффициент относительной биологической эффективности* (или *коэффициент качества*), показывающий, во сколько раз поражающее действие какого-либо излучения выше рентгеновского при одинаковой дозе поглощенного излучения.

Для электронов, рентгеновского и γ-излучения $k = 1$, для быстрых протонов и нейтронов ($E_\text{к} = 0{,}5$ МэВ) $k = 10$, для α-частиц $k = 20$.

Внесистемная единица – бэр (биологический эквивалент рентгена); $1\,\text{бэр} = 0{,}1\,\text{Зв}$.

5. Классификация элементарных частиц

Основные характеристики элементарных частиц:

• масса m (источник гравитационного взаимодействия);

• заряд q (источник электромагнитного взаимодействия);

• время жизни τ (существуют стабильные и нестабильные частицы).

Лептоны – частицы, которые не участвуют в сильном взаимодействии (всего 6 лептонов):

Название лептона	Обозначение	Масса, МэВ	Заряд, e	Время жизни, с	Год открытия
Электрон	e^-	0,511	– 1	∞	1897
Электронное нейтрино	ν	0	0	∞	1956
Мюон	μ^-	105	– 1	10^{-6}	1937
Мюонное нейтрино	ν_μ	0	0	∞	1962
Таон (τ-лептон)	τ^-	1784	– 1	10^{-13}	1975
Таонное нейтрино	ν_τ	0	0	∞	1976

Масса электрона $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

Заряд электрона $\left|e^-\right| = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Адроны – частицы, которые участвуют в сильном взаимодействии. Адроны состоят из кварков (всего 6 кварков):

Название кварка	Обозначение	Масса, МэВ	Заряд, е	Год открытия
up (верхний)	u	1,5 – 5	$\frac{2}{3}$	1964
dawn (нижний)	d	3 – 9	$-\frac{1}{3}$	1964
stronge (странный)	s	60 – 170	$-\frac{1}{3}$	1969
charm (очарованный)	c	1100 – 1400	$\frac{2}{3}$	1974
beauty (прелестный)	b	4100 – 4400	$-\frac{1}{3}$	1977
truth (истинный)	t	17 380	$\frac{2}{3}$	1984

Протоны и нейтроны состоят из трех кварков: протон – из двух u-кварков с положительным электрическим зарядом $q = \frac{2}{3}$е и одного d-кварка с зарядом $q = -\frac{1}{3}$е; нейтрон – из одного u-кварка и двух d-кварков.

Частицы – переносчики взаимодействий:

Наименование взаимодействия	Название частицы	Обозначение	Масса, ГэВ	Заряд, е
Электромагнитное	Фотон	γ	0	0
Слабое	Бозоны	$W\pm$	81	±1
		Z_0	93	0
Сильное	Глюоны	q_i $(i = 1,...,8)$	0	0

ПРИЛОЖЕНИЯ

Латинский алфавит

Буква	Название	Буква	Название
A a	а	*N n*	эн
B b	бэ	*O o*	о
C c	цэ	*P p*	пэ
D d	дэ	*Q q*	ку
E e	е, э	*R r*	эр
F f	эф	*S s*	эс
G g	гэ, жэ	*T t*	тэ
H h	ха, аш	*U u*	у
I i	и	*V v*	вэ
J j	йот, жи	*W w*	дубль-вэ
K k	ка	*X x*	икс
L l	эль	*Y y*	игрек
M m	эм	*Z z*	зэт

Греческий алфавит

Буква	Название	Буква	Название
Α α	альфа	Η η	эта
Β β	бета	Θ θ	тета
Γ γ	гамма	Ι ι	йота
Δ δ	дельта	Κ κ	каппа
Ε ε	эпсилон	Λ λ	лямбда
Ζ ζ	дзета	Μ μ	мю (ми)

Окончание

Буква	Название	Буква	Название
Ν ν	ню (ни)	Τ τ	тау
Ξ ξ	кси	Υ υ	ипсилон
Ο ο	омикрон	Φ φ	фи
Π π	пи	Χ χ	хи
Ρ ρ	ро	Ψ ψ	пси
Σ σ ς	сигма	Ω ω	омега

Римская система нумерации

Римский символ	Число	Римский символ	Число
I	1	XXX	30
II	2	XL	40
III	3	L	50
IV	4	LX	60
V	5	LXX	70
VI	6	LXXX	80
VII	7	XC	90
VIII	8	C	100
IX	9	CC	200
X	10	CCC	300
XI	11	CD	400
XII	12	D	500
XIII	13	DC	600
XIV	14	DCC	700
XV	15	DCCC	800
XVI	16	CM	900
XVII	17	M	1000
XVIII	18	MM	2000
XIX	19	MMM	3000
XX	20		

Названия больших чисел

10^{9} – миллиард,
10^{12} – триллион,
10^{15} – квадриллион,
10^{18} – квинтиллион,
10^{21} – секстиллион,
10^{24} – септиллион.

Названия степеней числа 10

10^{15} – пета (П),
10^{12} – тера (Т),
10^{9} – гига (Г),
10^{6} – мега (М),
10^{3} – кило (к),
10^{2} – гекто (г),
10^{1} – дека (да),
10^{-1} – деци (д),
10^{-2} – санти (с),
10^{-3} – милли (м),
10^{-6} – микро (мк),
10^{-9} – нано (н),
10^{-12} – пико (п),
10^{-15} – фемто (ф).

Метрическая система мер

Меры длины

1 километр (км) = 1000 метров (м),
1 метр (м) = 10 дециметров (дм) = 100 сантиметров (см),
1 дециметр (дм) = 10 сантиметров (см),
1 сантиметр (см) = 10 миллиметров (мм).

Меры площади

1 кв. километр (км^2) = 1 000 000 кв. метров (м^2),

1 кв. метр ($м^2$) = 100 кв. дециметров ($дм^2$) = 10 000 кв. сантиметров ($см^2$),

1 гектар (га) = 100 ар (а) = 10 000 кв. метров ($м^2$),

1 ар (а) = 100 кв. метров ($м^2$).

Меры объема

1 куб. метр ($м^3$) = 1000 куб. дециметров ($дм^3$) = 1 000 000 куб. сантиметров ($см^3$),

1 куб. дециметр ($дм^3$) = 1000 куб. сантиметров ($см^3$),

1 литр (л) = 1 куб. дециметр ($дм^3$).

Меры веса

1 тонна (т) = 10 центнеров (ц) = 1000 килограммов (кг),

1 центнер (ц) = 100 килограммов (кг),

1 килограмм (кг) = 1000 граммов (г),

1 грамм (г) = 1000 миллиграммов (мг).

Формулы перевода единиц

Единицы длины

1 дюйм = 2,54 сантиметра,

1 сантиметр ≈ 0,3937 дюйма,

1 фут ≈ 0,3048 метра,

1 метр ≈ 3,281 фута,

1 ярд ≈ 0,9144 метра,

1 метр ≈ 1,094 ярда,
1 миля ≈ 1,609 километра,
1 километр ≈ 0,6214 мили.

Единицы площади

1 кв. дюйм ≈ 6,452 кв. сантиметра,
1 кв. сантиметр ≈ 0,155 кв. дюйма,
1 кв. фут ≈ 0,0929 кв. метра,
1 кв. метр ≈ 10,76 кв. фута,
1 кв. ярд ≈ 0,8361 кв. метра,
1 кв. метр ≈ 1,196 кв. ярда,
1 кв. миля ≈ 2,59 кв. километра,
1 кв. километр ≈ 0,3861 кв. мили,
1 акр ≈ 0,4047 гектара,
1 гектар ≈ 2,471 акра.

Единицы объема

1 куб. дюйм ≈ 16,39 куб. сантиметра,
1 куб. сантиметр ≈ 0,06102 куб. дюйма,
1 куб. фут ≈ 0,02832 куб. метра,
1 куб. метр ≈ 35,31 куб. фута,
1 куб. ярд ≈ 0,7646 куб. метра,
1 куб. метр ≈1,308 куб. ярда.

Единицы массы

1 гран ≈ 0,0648 грамма,
1 грамм ≈15,43 грана,

1 унция ≈ 28,35 грамма,
1 грамм ≈ 0,03527 унции,
1 фунт ≈ 453,6 грамма,
1 грамм ≈ 0,002205 фунта,
1 фунт ≈ 0,4536 килограмма,
1 килограмм ≈ 2,205 фунта.

Физические постоянные

Скорость света в вакууме	$c = 2{,}998 \cdot 10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$
Постоянная Планка	$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Дж · с
Гравитационная постоянная	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$
Элементарный электрический заряд	$\text{e} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса покоя электрона	$m_\text{e} = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса покоя протона	$m_\text{p} = 1{,}673 \cdot 10^{-27}$ кг
Ускорение свободного падения	$g = 9{,}81\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
Нормальное атмосферное давление	$p_0 = 101\ 325$ Па
Объем 1 моля идеального газа при нормальных условиях	$V_0 = 22{,}4 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}$
Постоянная Авогадро	$N_\text{A} = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$

Универсальная газовая постоянная	$R = 8,31 \dfrac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$
Постоянная Больцмана	$k = 1,38 \cdot 10^{-23}\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{К}}$
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\ \dfrac{\text{Ф}}{\text{м}}$
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \dfrac{\text{Гн}}{\text{м}}$
Постоянная Фарадея	$F = 9,648 \cdot 10^{4}\ \dfrac{\text{Кл}}{\text{моль}}$
Постоянная Ридберга	$R = 1,097 \cdot 10^{7}\ \text{м}^{-1}$
Масса покоя нейтрона	$m_{\text{n}} = 1,675 \cdot 10^{-27}\ \text{кг}$

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

Справочное издание

Жавнерчик Валерий Эдуардович
Майсеня Людмила Иосифовна
Савилова Юлия Ивановна

**СПРАВОЧНИК
ПО МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ**

3-е издание, переработанное

Редакторы *Е.В. Малышева, Е.В. Савицкая*
Художественный редактор *Т.В. Шабунько*
Технический редактор *Н.А. Лебедевич*
Компьютерная верстка *А.Н. Бабенковой, Н.В. Шабуни*
Корректоры *В.И. Аверкина, Е.В. Савицкая*

12+

Подписано в печать 20.12.2021. Формат 60×90/32. Бумага офсетная. Гарнитура “Таймс”. Офсетная печать. Усл. печ. л. 12,5. Уч.-изд. л. 11,0. Тираж 1000 экз. Заказ 2047.

Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Вышэйшая школа”».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/3 от 08.07.2013.
Пр. Победителей, 11, 220004, Минск.
e-mail: market@vshph.com   http://vshph.com

Открытое акционерное общество «Полиграфкомбинат им. Я. Коласа».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 2/3 от 10.09.2018.
Ул. Корженевского, 20, 220024, Минск.
Отпечатано: Филиал № 1 ОАО «Полиграфкомбинат им. Я. Коласа».
Ул. Советская, 80, 225409, Барановичи.