А.П. Рябушко Т.А. Жур

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Теория и задачи

Допущено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов
учреждений высшего образования
по техническим специальностям

В пяти частях

Часть 1

**Линейная и векторная алгебра.
Аналитическая геометрия.
Дифференциальное исчисление
функций одной переменной**

2-е издание

Минск
«Вышэйшая школа»

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
Р98

Р е ц е н з е н т ы : кафедра высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники» (заведующий кафедрой доктор физико-математических наук, профессор *В.В. Цегельник*); заведующий кафедрой теории функций Белорусского государственного университета доктор физико-математических наук, профессор *В.Г. Кротов*

Рябушко, А. П.

Р98 Высшая математика : теория и задачи : учеб. пособие. В 5 ч. Ч. 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной / А. П. Рябушко, Т. А. Жур, 2-е изд. – Минск : Вышэйшая школа, 2017. – 303 с. : ил.

ISBN 978-985-06-2884-8.

Это первая часть комплекса учебных пособий по высшей математике, направленных на развитие и активизацию самостоятельной, творческой работы студентов технических университетов. Содержатся необходимые теоретические сведения, наборы задач для аудиторных занятий, индивидуальных домашних заданий, контрольных работ.

Предыдущее издание вышло в 2016 г.

Для студентов учреждений высшего образования по техническим специальностям. Будет полезно студентам экономических специальностей, а также преподавателям учреждений высшего и среднего специального образования.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-985-06-2884-8 (ч. 1)
ISBN 978-985-06-2885-5

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый вниманию читателя комплекс учебных пособий под общим названием «Высшая математика: теория и задачи» в пяти частях содержит в своей основе существенно переработанный и дополненный материал неоднократно переиздававшегося комплекса учебных пособий «Индивидуальные задания по высшей математике» в четырех частях коллектива авторов под общей редакцией доктора физико-математических наук, профессора А.П. Рябушко (Минск, издательство «Вышэйшая школа»).

В новом комплексе многие задачи заменены более удачными, добавлено несколько сот новых задач, включены три новые главы («Элементы теории функций комплексной переменной», «Операционное исчисление», «Элементы теории устойчивости»), увеличено количество аудиторных занятий (АЗ), индивидуальных домашних заданий (ИДЗ), блочных контрольных работ (БКР), дополнительных задач к каждой главе, среди которых имеются задачи уровня НИРС (научно-исследовательская работа студентов). Номера этих задач помечены звездочкой. Во всех АЗ выделены задачи для самостоятельного решения, которые можно использовать для проведения на АЗ мини-контрольных работ (МКР). К каждому ИДЗ дается письменная консультация (решение типового варианта). Чтобы сэкономить время студента при выполнении МКР, ИДЗ и других заданий, в пособие включены необходимые теоретические сведения с поясняющими их решенными примерами.

Большинство имеющихся в настоящее время учебников и учебных пособий, сборников задач и упражнений по общему курсу высшей математики для технических университетов не позволяют индивидуализировать обучение, так как содержат недостаточное количество однотипных задач и упражнений, не предусматривают выдачи каждому студенту индивидуального задания с последующим контролем и выставлением оценки. Данное пособие дает возможность перехода от пассивных форм обучения к активной творческой работе со студентами, от «валового» обучения к усилению индивидуального подхода, развитию творческих способностей обучаемых путем расширения их самостоятельной работы. Появляется возможность введения инновационных технологий в преподавание математики, например блочно-рейтинговой системы обучения и контроля знаний и умений студентов (см. приложения).

Комплекс написан в соответствии с действующими программами курса высшей математики в объеме до 500 ч для технических специальностей университетов, но может быть использован в учреждениях образования, где количество часов, отведенное на изучение высшей математики, значительно меньше (для чего из предлагаемого материала следует сделать необходимую выборку). Кроме того, он вполне доступен студентам вечерних и заочных отделений.

Написанию данного комплекса учебных пособий способствовала доброжелательная, творческая обстановка на кафедре высшей математике № 1 Белорусского национального технического университета, возглавляемой кандидатом физико-математических наук, доцентом И.Н. Катковской.

Авторы выражают искреннюю признательность рецензентам – коллективу кафедры высшей математики Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники, возглавляемой доктором физико-математических наук, профессором В.В. Цегельником, а также заведующему кафедрой теории функций Белорусского государственного университета доктору физико-математических наук, профессору В.Г. Кротову, которые дали ряд полезных советов, способствовавших повышению качества комплекса.

Все отзывы и пожелания, которые авторы примут с благодарностью, просьба направлять по адресу: издательство «Вышэйшая школа», пр. Победителей, 11, 220004, Минск.

Авторы

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Охарактеризуем структуру пособия, методику его использования, организацию проверки и оценки знаний, навыков и умений студентов.

Весь теоретический материал по курсу высшей математики разделен на главы, в каждой из которых даются основные определения, понятия, формулировки теорем, формулы, используемые при решении задач и выполнении упражнений. Изложение этих сведений иллюстрируется решенными примерами. (Начало решения обозначено символом ▶, а конец – ◀.) Затем даются подборки задач с ответами для всех практических аудиторных занятий (АЗ) и самостоятельных (мини-контрольных) работ на 10–15 мин во время этих занятий. И, наконец, приводятся недельные индивидуальные домашние задания (ИДЗ), каждое из которых содержит 30 вариантов и сопровождается решением типового варианта (письменная консультация). Часть задач из ИДЗ снабжена ответами. В конце каждой главы помещены дополнительные задачи повышенной трудности и прикладного характера. Некоторые из них (помеченные звездочкой) могут служить темами для научно-исследовательской работы студентов.

В приложениях приведены одно- и двухчасовые контрольные работы (каждая по 30 вариантов) по важнейшим темам курса.

Нумерация АЗ сквозная и состоит из двух чисел: первое из них указывает на главу, а второе – на порядковый номер АЗ в этой главе. Например, шифр АЗ-2.1 означает, что АЗ относится ко второй главе и является первым по счету.

Для ИДЗ также принята нумерация по главам. Например, шифр ИДЗ-5.2 означает, что ИДЗ относится к пятой главе и является вторым. Внутри каждого ИДЗ принята следующая нумерация: первое число означает номер задачи в данном задании, а второе – номер варианта. Таким образом, шифр ИДЗ-5.2:16 означает, что студент должен выполнить 16-й вариант из ИДЗ-5.2, который содержит задачи 1.16, 2.16, 3.16, 4.16. При выдаче ИДЗ студентам номера выполняемых вариантов можно менять от задания к заданию по какой-либо системе или случайным образом. Более того, можно при выдаче ИДЗ любому студенту составить его вариант, комбинируя однотипные задачи из разных вариантов. Например, шифр ИДЗ-3.1:1.2; 2.4; 3.6 означает, что студенту следует решать в ИДЗ-3.1 первую задачу из варианта 2, вторую – из варианта 4 и третью – из варианта 6. Такой комбинированный метод выдачи ИДЗ позволяет из 30 вариантов получить большое количество новых вариантов.

Внедрение ИДЗ в учебный процесс некоторых технических университетов показало, что целесообразнее выдавать ИДЗ не после каждого АЗ (которых, как правило, два в неделю), а одно недельное ИДЗ, включающее основной материал двух АЗ данной недели.

Дадим некоторые общие рекомендации по организации работы студентов в соответствии с настоящим пособием.

1. Студенческие группы по 25 человек, проводится два АЗ в неделю, планируются еженедельные необязательные для посещения студентами консультации, выдаются недельные ИДЗ. При этих условиях для систематического контроля с выставлением оценок, указанием ошибок и путей их исправления могут быть использованы выдаваемые каждому преподавателю матрицы ответов и банк листов решений, которые кафедра разрабатывает для ИДЗ (студентам они не выдаются). Если матрицы ответов составляются для всех задач из ИДЗ, то листы решений разрабатываются только для тех задач и вариантов, где важно проверить правильность выбора метода, последовательности действий, навыки и умения при вычислениях. Кафедра определяет, для каких ИДЗ нужны листы решений. Листы решений (один вариант – на одном листе) используются при самоконтроле правильности выполнения заданий, при взаимном студенческом контроле, а чаще всего – при комбинированном контроле: преподаватель проверяет лишь правильность выбора метода, а студент по листу решений – свои вычисления. Эти методы позволяют проверить ИДЗ 25 студентов за 15–20 мин с выставлением оценок в журнал.

2. Студенческие группы по 15 человек, проводится два АЗ в неделю, в расписание для каждой группы включены обязательные 2 ч в неделю самоподготовки под контролем преподавателя. При этих условиях организация индивидуальной, самостоятельной, творческой работы студентов, оперативного контроля за качеством этой работы значительно улучшается. Рекомендованные выше методы пригодны и в данном случае, однако появляются новые возможности. На АЗ быстрее проверяются и оцениваются ИДЗ, во время обязательной самоподготовки можно проконтролировать проработку теории и решение ИДЗ,

выставить оценки некоторой части студентов, принять задолженности по ИДЗ у отстающих.

Накапливание большого количества оценок за ИДЗ, самостоятельные и контрольные работы в аудитории позволяют контролировать учебный процесс, управлять им, оценивать качество усвоения изучаемого материала. Все это дает возможность отказаться от традиционного итогового семестрового (годового) экзамена по материалу всего семестра (учебного года) и ввести рейтинг-блок-модульную систему (РБМС) оценки знаний и навыков студентов, состоящую в следующем. Материал семестра (учебного года) разделяется на 2—3 блока, по каждому из которых выполняются АЗ, ИДЗ и в конце каждого цикла — двухчасовая письменная коллоквиум-контрольная работа (блочный экзамен, блочная контрольная работа — БКР), в которую входит 2—3 теоретических вопроса и 5—6 задач (см. прил. 6). Учет оценок по АЗ, ИДЗ и БКР позволяет вывести объективную общую оценку за каждый блок и итоговую оценку по всем блокам семестра (учебного года).

В заключение отметим, что усвоение содержащегося в пособии материала при любой системе обучения гарантирует студенту хорошие знания по соответствующим разделам курса высшей математики. Для отлично успевающих студентов необходима подготовка заданий повышенной сложности (индивидуальный подход в обучении!) с перспективными поощрительными мерами. Например, можно разработать для таких студентов специальные задания на весь семестр, включающие задачи из данного пособия и дополнительные более сложные задачи и теоретические упражнения (для этого, в частности, предназначены дополнительные задачи в конце каждой главы). Преподаватель может выдать эти задания в начале семестра, установить график их выполнения (под своим контролем), разрешить свободное посещение лекционных или практических занятий по высшей математике и в случае успешной работы выставить отличную оценку. Эта оценка достигается, как правило, при участии студента в НИРС.

1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. МАТРИЦЫ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1.1. Определители и их свойства. Вычисление определителей

Определителем n-го порядка называется число Δ_n, записываемое в виде квадратной таблицы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.1}$$

и вычисляемое, согласно указанному ниже правилу, по заданным числам a_{ij} $(i, j = \overline{1, n})$, которые называются *элементами определителя* (всего их n^2). Индекс i указывает номер строки, а j – номер столбца квадратной таблицы (1.1), на пересечении которых находится элемент a_{ij}. Любую строку или столбец этой таблицы будем называть *рядом определителя*.

Главной диагональю определителя называется совокупность элементов $a_{11},\ a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Минором M_{ij} *элемента* a_{ij} называется определитель $(n-1)$-го порядка Δ_{n-1}, полученный из определителя n-го порядка Δ_n вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Алгебраическое дополнение A_{ij} *элемента* a_{ij} определяется равенством

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Значение определителя Δ_n находится по следующему правилу:

для $n = 2$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}; \tag{1.2}$$

для $n = 3$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}, \tag{1.3}$$

где

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Величины A_{11}, A_{12}, A_{13} – алгебраические дополнения, а M_{11}, M_{12}, M_{13} – миноры определителя Δ_3, соответствующие его элементам a_{11}, a_{12}, a_{13}. Эти миноры являются определителями второго порядка, получаемыми из определителя Δ_3 вычеркиванием соответствующих строки и столбца. Например, чтобы найти минор M_{12}, следует в определителе Δ_3 вычеркнуть первую строку и второй столбец.

Для произвольного n

$$\Delta_n=\sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k}, \tag{1.4}$$

где $A_{1k}=(-1)^{1+k}M_{1k}$, а миноры M_{1k}, являющиеся определителями $(n-1)$-го порядка, получаются из Δ_n вычеркиванием первой строки и k-го столбца.

Например,

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 12 & 5 \end{vmatrix}=3\cdot5-(-2)\cdot12=39,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 4 & 7 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix}=4\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}-7\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=4(-7)-7(21-25)-3\cdot5=-15,$$

$$\Delta_4=\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}-$$

$$-3\begin{vmatrix}0 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 0\\ 5 & 0 & 4\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}0 & 4 & -2\\ 1 & -3 & 0\\ 5 & 0 & 4\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}0 & 4 & 1\\ 1 & -3 & -1\\ 5 & 0 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=-(4(-4)+3\cdot 4-2\cdot 0)-3(0(-4)-4-2\cdot 5)+2(0(-12)-4\cdot 4-2\cdot 15)=-46.$$

З а м е ч а н и е. Если элементами определителя являются некоторые функции, то данный определитель, вообще говоря, тоже функция (но может быть и числом). Например,

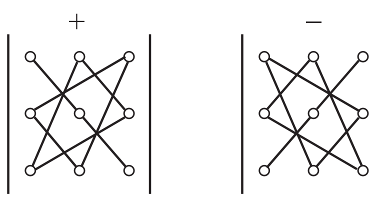
$$\begin{vmatrix}\cos x & 2\sin x\\ \sin x & 2\cos x\end{vmatrix}=2\cos^2 x-2\sin^2 x=2\cos 2x;$$

$$\begin{vmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{vmatrix}=\cos^2 x+\sin^2 x=1;\quad \begin{vmatrix}\operatorname{tg} x & 3\\ 1/3 & \operatorname{ctg} x\end{vmatrix}=1-1=0.$$

Правило вычисления определителя Δ_3 равносильно *правилу треугольников* (*правилу Саррюса*):

$$\begin{aligned}\Delta_3 = {} & a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-\\ & -(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{12}a_{21}a_{33}+a_{23}a_{32}a_{11}).\end{aligned} \tag{1.5}$$

Схематическая запись этого правила приведена ниже:



Например,

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 6 & 5\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 6\cdot 1+2\cdot 5\cdot 2+4(-1)(-3)-$$
$$-((-3)\cdot 6\cdot 2+2\cdot 4\cdot 1+5(-1)1)=71.$$

Перечислим *основные свойства определителей*.

1. Сумма произведений элементов любого ряда определителя и их алгебраических дополнений не зависит от номера ряда и равна этому определителю:

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}. \qquad (1.6)$$

Равенства (1.6) можно было бы (как и формулу (1.4)) принять за правило вычисления определителя. Первое из них называется *разложением* Δ_n *по элементам i-й строки*, а второе – *разложением* Δ_n *по элементам j-го столбца*.

2. Значение определителя не меняется после замены всех его строк соответствующими столбцами, и наоборот.

3. Если поменять местами два параллельных ряда определителя, то он изменит знак на противоположный.

4. Определитель с двумя одинаковыми параллельными рядами равен нулю.

5. Если все элементы некоторого ряда определителя имеют общий множитель, то последний можно вынести за знак определителя. Отсюда следует, что если элементы какого-либо ряда умножить на число λ, то определитель Δ_n умножится на это же число λ.

6. Если все элементы какого-либо ряда определителя равны нулю, то определитель также равен нулю.

7. Определитель, у которого элементы двух параллельных рядов соответственно пропорциональны, равен нулю.

8. Сумма всех произведений элементов какого-либо ряда определителя и алгебраических дополнений соответствующих элементов другого параллельного ряда равна нулю, т.е. верны равенства:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = 0 \quad (i \neq j).$$

9. Если каждый элемент какого-либо ряда определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то такой определитель равен сумме двух определителей, в первом из которых соответствующий ряд состоит из первых слагаемых, а во втором – из вторых слагаемых:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i}+b_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i}+b_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni}+b_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1+2 & 4 \\ 7 & 3-1 & 5 \\ 4 & 2+3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 7 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 7 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

10. Определитель не изменится, если ко всем элементам какого-либо его ряда прибавить соответствующие элементы другого параллельного ряда, умноженные на одно и то же число λ.

Например, для столбцов определителя это свойство выражается равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i}+\lambda a_{1j} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i}+\lambda a_{2j} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni}+\lambda a_{nj} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим *основные методы вычисления определителей.*

1. *Метод эффективного понижения порядка.* В соответствии с формулой (1.4) вычисление определителя n-го порядка сводится к вычислению n определителей $(n-1)$-го порядка. Такой метод понижения порядка не эффективен. Используя основные свойства определителей, вычисление $\Delta_n \neq 0$ всегда можно свести к вычислению одного определителя $(n-1)$-го порядка, сделав в каком-либо ряду Δ_n все элементы, кроме одного, равными нулю. Покажем это на примере.

Пример 1. Вычислить определитель

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 60 & -20 & 240 & 160 \\ -5 & 3 & -34 & -23 \\ 1 & 1 & 3 & -7 \\ -9 & 2 & 8 & -15 \end{vmatrix}.$$

▶ По свойству 5 определителей из первой строки вынесем множитель 20, а затем будем последовательно умножать полученную строку на 3, 1, 2 и складывать соответственно со второй, третьей и четвертой строками. Тогда, согласно свойству 10, имеем:

$$\Delta_4 = 20\begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 & 8 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 15 & 1 \\ -3 & 0 & 32 & 1 \end{vmatrix}.$$

По свойству 1 определителей (см. второе из равенств (1.6)) полученный определитель можно разложить по элементам второго столбца. Тогда

$$\Delta_4 = 20\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 15 & 1 \\ -3 & 32 & 1 \end{vmatrix}.$$

Получили определитель третьего порядка, который можно вычислить по правилу Саррюса или подобным же приемом свести к вычислению одного определителя второго порядка. Действительно, вычитая из второй и третьей строк данного определителя первую строку, получаем:

$$\Delta_4 = 20\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 13 & 0 \\ -7 & 30 & 0 \end{vmatrix} = 20\begin{vmatrix} 0 & 13 \\ -7 & 30 \end{vmatrix} = 20 \cdot 7 \cdot 13 = 1820.$$ ◀

З а м е ч а н и е. Если $\Delta_n = 0$, где $n > 3$, то по методике вычисления определителя из примера 1 можно получить ряд из нулей, или $\Delta_3 = 0$.

2. *Приведение определителя к треугольному виду.* Определитель, у которого все элементы, находящиеся выше или ниже главной диагонали, равны нулю, называется *определителем треугольного вида*. Очевидно, что в этом случае определитель равен произведению элементов его главной диагонали. Приведение любого определителя Δ_n к треугольному виду всегда возможно с помощью приемов, описанных в примере 1.

Пример 2. Вычислить определитель

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 7 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 9 & 27 & 6 & 10 & -9 \\ 3 & 9 & 6 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 8 & -1 \end{vmatrix}.$$

▶ Выполним следующие операции: пятый столбец определителя сложим с первым, этот же столбец, умноженный на 3, – со вторым, на 2 – с третьим, на 8 – с четвертым столбцом. В итоге получим определитель треугольного вида, который равен исходному:

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & -12 & -2 \\ 0 & 7 & 4 & 11 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & -62 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -22 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3\cdot 7\cdot 12\cdot 22 = -5544. \blacktriangleleft$$

Приведение определителей к треугольному виду будет использоваться в дальнейшем при решении систем линейных уравнений *методом Жордана – Гаусса* (его называют также *методом Гаусса*).

1.2. Матрицы и операции над ними

Прямоугольная таблица, составленная из $m\times n$ элементов a_{ij} $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$ некоторого множества, называется *матрицей* и записывается в виде

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ или } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Элементы матрицы нумеруются двумя индексами. Первый индекс i элемента a_{ij} обозначает номер строки, а второй j – номер столбца, на пересечении которых находится этот элемент в матрице. Матрицы обычно обозначают прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, ... Если у матрицы m строк и n столбцов, то по определению она имеет размерность $m\times n$. В случае необходимости это обозначается следующим образом: $A_{m\times n}$. Матрица называется *числовой*, если ее элементы a_{ij} – числа; *функциональной*, если a_{ij} – функции; *векторной*, если a_{ij} – векторы, и т.д. Матрицы A и B называются *равными*, если все их соответствующие элементы a_{ij} и b_{ij} равны, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$. Следовательно, равными могут быть только матрицы одинаковой размерности. Матрицы, у которых $m = n$, называются *квадратными*. Если $m = 1$, то получаем *матрицу-строку*; если $n = 1$, имеем *матрицу-столбец*. Их также называют *вектором-строкой* и *вектором-столбцом* соответственно.

Перечислим *основные операции над матрицами*.

1. *Сложение и вычитание матриц*. Эти операции определяются только для матриц одинаковой размерности. *Суммой* (*разностью*) *матриц* A и B, обозначаемой $A+B$ ($A-B$), называется матрица C, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$, где a_{ij}, b_{ij} – элементы матриц A и B соответственно.

Например, пусть

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \\ 8 & -11 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$A+B = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 5 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, \ A-B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -11 \\ -11 & 20 \end{bmatrix}.$$

2. *Умножение матрицы на число. Произведением матрицы A и числа* λ, обозначаемым λA, называется матрица B той же размерности, элементы которой $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, где a_{ij} – элементы матрицы A, т.е. при умножении матрицы на число (числа на матрицу) надо все элементы матрицы умножить на это число.

Например, пусть

$$\lambda = -2, \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\lambda A = -2\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ -14 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. *Умножение матриц. Произведением матриц $A_{m\times n}$ и $B_{n\times p}$* называется матрица $C_{m\times p} = A \cdot B$ (или проще AB), элементы которой $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$, где a_{ik}, b_{kj} – элементы матриц A и B. Отсюда следует, что произведение AB существует только в случае, когда первый множитель A имеет число столбцов, равное числу строк второго множителя B. Далее, число строк матрицы AB равно числу строк матрицы A, а число столбцов – числу столбцов

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Методические рекомендации. 5

1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. МАТРИЦЫ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ 8

1.1. Определители и их свойства. Вычисление определителей . . 8
1.2. Матрицы и операции над ними 14
1.3. Обратные матрицы. Элементарные преобразования. Ранг матрицы. Теорема Кронекера – Капелли 17
1.4. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений. 23
1.5. Аудиторные занятия к гл. 1 28
1.6. Индивидуальные домашние задания к гл. 1. 36
1.7. Дополнительные задачи к гл. 1. 56

2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА 61

2.1. Векторы. Линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось. Координаты вектора 61
2.2. Деление отрезка в данном отношении. Скалярное произведение векторов и его приложения. 65
2.3. Векторное и смешанное произведения векторов и их приложения. 67
2.4. Аудиторные занятия к гл. 2 69
2.5. Индивидуальные домашние задания к гл. 2. 72
2.6. Дополнительные задачи к гл. 2. 86

3. ПЛОСКОСТИ И ПРЯМЫЕ 89

3.1. Плоскость. 89
3.2. Прямая в пространстве. Прямая и плоскость 90
3.3. Прямая на плоскости 94
3.4. Аудиторные занятия к гл. 3 96
3.5. Индивидуальные домашние задания к гл. 3. 100
3.6. Дополнительные задачи к гл. 3. 114

4. ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ 117

4.1. Линии второго порядка 117
4.2. Поверхности второго порядка 122

4.3. Линии, заданные уравнениями в полярных координатах и параметрическими уравнениями 127
4.4. Аудиторные занятия к гл. 4 132
4.5. Индивидуальные домашние задания к гл. 4. 136
4.6. Дополнительные задачи к гл. 4. 150

5. ФУНКЦИИ. ПРЕДЕЛЫ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ 153

5.1. Числовые множества. Определение и способы задания функций 153
5.2. Пределы последовательностей и функций. Раскрытие простейших неопределенностей 155
5.3. Замечательные пределы. 157
5.4. Сравнение бесконечно малых функций. Непрерывность функций 158
5.5. Аудиторные занятия к гл. 5 160
5.6. Индивидуальные домашние задания к гл. 5. 164
5.7. Дополнительные задачи к гл. 5. 182

6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ 185

6.1. Производная, ее геометрический и физический смысл. Правила и формулы дифференцирования 185
6.2. Логарифмическое дифференцирование. 189
6.3. Производные высших порядков 190
6.4. Дифференциалы первого и высших порядков и их приложения. 191
6.5. Теоремы о среднем. Правило Лопиталя – Бернулли 194
6.6. Исследование поведения функций и их графиков 197
6.7. Схема полного исследования функции и построение ее графика 203
6.8. Практические задачи на экстремум. 205
6.9. Дифференциал длины дуги и кривизна плоской линии 207
6.10. Аудиторные занятия к гл. 6 212
6.11. Индивидуальные домашние задания к гл. 6. 220
6.12. Дополнительные задачи к гл. 6. 266

Приложения 269

Рекомендуемая литература 301

Учебное издание

Рябушко Антон Петрович
Жур Татьяна Антоновна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Теория и задачи

Учебное пособие

В пяти частях
Часть 1

Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

2-е издание

Редактор *Е.В. Малышева*
Художественный редактор *В.А. Ярошевич*
Технический редактор *Н.А. Лебедевич*
Корректор *Т.В. Кульнис*
Компьютерная верстка *А.Н. Бабенковой*

Подписано в печать 08.09.2017. Формат 84×108/32. Бумага для офсетной печати.
Гарнитура «NewtonC». Офсетная печать. Усл. печ. л. 15,96.
Уч.-изд. л. 16,16. Тираж 1200 экз. Заказ 2312.

Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Вышэйшая школа”».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/3 от 08.07.2013.
Пр. Победителей, 11, 220004, Минск.
e-mail: market@vshph.com http://vshph.com

Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Белорусский Дом печати”».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 2/102 от 01.04.2014.
Пр. Независимости, 79, 220013, Минск.