А.П. Рябушко Т.А. Жур

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Теория и задачи

Допущено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов
учреждений высшего образования
по техническим специальностям

В пяти частях

Часть 3

**Обыкновенные дифференциальные уравнения.
Ряды.
Кратные интегралы**

Минск
«Вышэйшая школа»
2017

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
Р98

Р е ц е н з е н т ы: кафедра высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники» (заведующий кафедрой доктор физико-математических наук *В.В. Цегельник*); заведующий кафедрой теории функций Белорусского государственного университета доктор физико-математических наук, профессор *В.Г. Кротов*

Рябушко, А.П.

Р98 Высшая математика : теория и задачи : учеб. пособие. В 5 ч. Ч. 3. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ряды. Кратные интегралы / А. П. Рябушко, Т. А. Жур. – Минск : Вышэйшая школа, 2017. – 319 с. : ил.

ISBN 978-985-06-2798-8.

Это третья часть комплекса учебных пособий по высшей математике, направленных на развитие и активизацию самостоятельной, творческой работы студентов технических университетов. Содержатся необходимые теоретические сведения, наборы задач для аудиторных и индивидуальных домашних заданий, контрольных работ.

Для студентов учреждений высшего образования по техническим специальностям. Будет полезно студентам экономических специальностей, а также преподавателям учреждений высшего и среднего специального образования.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-985-06-2798-8(ч. 3)
ISBN 978-985-06-2764-3

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый вниманию читателя комплекс учебных пособий под общим названием «Высшая математика: теория и задачи» в пяти частях содержит в своей основе существенно переработанный и дополненный материал неоднократно переиздававшегося комплекса учебных пособий «Индивидуальные задания по высшей математике» в четырех частях коллектива авторов под общей редакцией доктора физико-математических наук, профессора А.П. Рябушко (Минск, издательство «Вышэйшая школа»).

В новом комплексе многие задачи заменены более удачными, добавлено несколько сот новых задач, увеличено количество аудиторных занятий (АЗ), индивидуальных домашних заданий (ИДЗ), блочных контрольных работ (БКР), дополнительных задач к каждой главе, среди которых имеются задачи уровня НИРС (научно-исследовательская работа студентов). Номера этих задач помечены звездочкой. Во всех АЗ выделены задачи для самостоятельного решения, которые можно использовать для проведения на АЗ мини-контрольных работ (МКР). К каждому ИДЗ дается письменная консультация (решение типового варианта). Чтобы сэкономить время студента при выполнении МКР, ИДЗ и других заданий, в пособие включены необходимые теоретические сведения с поясняющими их решенными примерами.

Большинство имеющихся в настоящее время учебников и учебных пособий, сборников задач и упражнений по общему курсу высшей математики для технических университетов не позволяют индивидуализировать обучение, так как содержат недостаточное количество однотипных задач и упражнений, не предусматривают выдачи каждому студенту индивидуального задания с последующим контролем и выставлением оценки. Данное пособие дает возможность перехода от пассивных форм обучения к активной творческой работе со студентами, от «валового» обучения к усилению индивидуального подхода, развитию творческих способностей обучаемых путем расширения их самостоятельной работы. Появляется возможность введения инновационных технологий в преподавание математики, например блочно-рейтинговой системы обучения и контроля знаний и умений студентов (см. ч. 1, прил. 6).

Комплекс написан в соответствии с действующими программами курса высшей математики в объеме до 500 ч для технических специальностей университетов, но может быть использован в учреждениях образования разных профилей, где количество часов, отведенное на изучение высшей математики, значительно меньше (для чего из предлагаемого материала следует сделать необходимую выборку). Кроме того, он вполне доступен студентам вечерних и заочных отделений.

Авторы выражают искреннюю признательность рецензентам – коллективу кафедры высшей математики Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники, возглавляемой доктором физико-математических наук, профессором В.В. Цегельником, а также заведующему кафедрой теории функций Белорусского государственного университета доктору физико-математических наук, профессору В.Г. Кротову, которые дали ряд полезных советов, способствовавших повышению качества комплекса.

Все отзывы и пожелания, которые авторы примут с благодарностью, просьба направлять по адресу: издательство «Вышэйшая школа», пр. Победителей, 11, 220004, Минск.

Авторы

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Охарактеризуем структуру пособия, методику его использования, организацию проверки и оценки знаний, навыков и умений студентов.

Весь теоретический материал по курсу высшей математики разделен на главы, в каждой из которых даются основные определения, понятия, формулировки теорем, формулы, используемые при решении задач и выполнении упражнений. Изложение этих сведений иллюстрируется решенными примерами. (Начало решения примеров обозначено символом ▸, а конец — ◂.) Затем даются подборки задач с ответами для всех практических аудиторных занятий (АЗ) и самостоятельных (мини-контрольных) работ на 10—15 мин во время этих занятий. И, наконец, приводятся недельные индивидуальные домашние задания (ИДЗ), каждое из которых содержит 30 вариантов и сопровождается решением типового варианта (письменная консультация). Часть задач из ИДЗ снабжена ответами. В конце каждой главы помещены дополнительные задачи повышенной трудности и прикладного характера. Некоторые из них (помеченные звездочкой) могут служить темами для научно-исследовательской работы студентов.

В приложениях приведены одно- и двухчасовые контрольные работы (каждая по 30 вариантов) по важнейшим темам курса.

Нумерация АЗ сквозная и состоит из двух чисел: первое из них указывает на главу, а второе — на порядковый номер АЗ в этой главе. Например, шифр АЗ-11.1 означает, что АЗ относится к одиннадцатой главе и является первым по счету.

Для ИДЗ также принята нумерация по главам. Например, шифр ИДЗ-11.2 означает, что ИДЗ относится к одиннадцатой главе и является вторым. Внутри каждого ИДЗ принята следующая нумерация: первое число означает номер задачи в данном задании, а второе — номер варианта. Таким образом, шифр ИДЗ-11.2:16 означает, что студент должен выполнить 16-й вариант из ИДЗ-11.2, который содержит задачи 1.16, 2.16, 3.16, 4.16, 5.16. При выдаче ИДЗ студентам номера выполняемых вариантов можно менять от задания к заданию по какой-либо системе или случайным образом. Более того, можно при выдаче ИДЗ любому студенту составить его вариант, комбинируя однотипные задачи из разных вариантов. Например, шифр

ИДЗ-12.1:1.2; 2.4; 3.6 означает, что студенту следует решать в ИДЗ-12.1 первую задачу из варианта 2, вторую – из варианта 4 и третью – из варианта 6. Такой комбинированный метод выдачи ИДЗ позволяет из 30 вариантов получить большое количество новых вариантов.

Внедрение ИДЗ в учебный процесс некоторых технических университетов показало, что целесообразнее выдавать ИДЗ не после каждого АЗ (которых, как правило, два в неделю), а одно недельное ИДЗ, включающее основной материал двух АЗ данной недели.

Дадим некоторые общие рекомендации по организации работы в соответствии с настоящим пособием.

1. Студенческие группы по 25 человек, проводится два АЗ в неделю, планируются еженедельные не обязательные для посещения студентами консультации, выдаются недельные ИДЗ. При этих условиях для систематического контроля с выставлением оценок, указанием ошибок и путей их исправления могут быть использованы выдаваемые каждому преподавателю матрицы ответов и банк листов решений, которые кафедра разрабатывает для ИДЗ (студентам они не выдаются). Если матрицы ответов составляются для всех задач из ИДЗ, то листы решений разрабатываются только для тех задач и вариантов, где важно проверить правильность выбора метода, последовательности действий, навыки и умения при вычислениях. Кафедра определяет, для каких ИДЗ нужны листы решений. Последние (один вариант – на одном листе) используются при самоконтроле правильности выполнения заданий, при взаимном студенческом контроле, а чаще всего – при комбинированном контроле: преподаватель проверяет лишь правильность выбора метода, а студент по листу решений – свои вычисления. Эти методы позволяют проверить ИДЗ 25 студентов за 15–20 мин с выставлением оценок в журнал.

2. Студенческие группы по 15 человек, проводится два АЗ в неделю, в расписание для каждой группы включены обязательные 2 ч в неделю самоподготовки под контролем преподавателя. При этих условиях организация индивидуальной, самостоятельной, творческой работы студентов, оперативного контроля за качеством этой работы значительно улучшается. Рекомендованные выше методы пригодны и в данном случае, однако появляются новые возможности. На АЗ быстрее проверяются и оцениваются ИДЗ, во время обязательной самоподготовки можно проконтролировать проработку теории и решение ИДЗ,

выставить оценки некоторой части студентов, принять задолженности по ИДЗ у отстающих.

Накапливание большого количества оценок за ИДЗ, самостоятельные и контрольные работы в аудитории позволяют контролировать учебный процесс, управлять им, оценивать качество усвоения изучаемого материала. Все это дает возможность отказаться от традиционного итогового семестрового (годового) экзамена по материалу всего семестра (учебного года) и ввести рейтинг-блок-модульную систему (РБМС) оценки знаний и навыков студентов, состоящую в следующем. Материал семестра (учебного года) разделяется на 2–3 блока, по каждому из которых выполняются АЗ, ИДЗ и в конце каждого цикла – двухчасовая письменная коллоквиум-контрольная работа (блочный экзамен, блочная контрольная работа – БКР), в которую входит 2–3 теоретических вопроса и 5–6 задач. Учет оценок по АЗ, ИДЗ и БКР позволяет вывести объективную общую оценку за каждый блок и итоговую оценку по всем блокам семестра (учебного года).

В заключение отметим, что усвоение содержащегося в пособии материала при любой системе обучения гарантирует студенту знания по соответствующим разделам курса высшей математики. Для отлично успевающих студентов необходима подготовка заданий повышенной сложности (индивидуальный подход в обучении!) с перспективными поощрительными мерами. Например, можно разработать для таких студентов специальные задания на весь семестр, включающие задачи из данного пособия и дополнительные более сложные задачи и теоретические упражнения (для этого, в частности, предназначены дополнительные задачи в конце каждой главы). Преподаватель может выдать эти задания в начале семестра, установить график их выполнения (под своим контролем), разрешить свободное посещение лекционных или практических занятий по высшей математике и в случае успешной работы выставить отличную оценку. Эта оценка достигается, как правило, при участии студента в НИРС.

11. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

11.1. Основные понятия. Дифференциальные уравнения первого порядка. Метод изоклин

Уравнение называется *дифференциальным* относительно некоторой искомой функции, если оно содержит хотя бы одну производную этой функции. *Порядок дифференциального уравнения* совпадает (по определению) с порядком наивысшей производной, входящей в это уравнение.

Если искомая функция y является функцией одного аргумента x, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*. Если же искомая функция зависит от нескольких аргументов, то дифференциальное уравнение называется *уравнением в частных производных*. Так, например, уравнение $2xy' - 3y = 0$, где $y = y(x)$, является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, а $u'_x - u'_y + xy + 1 = 0$, где $u = u(x, y)$, – дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка. (В этой главе рассматриваются только обыкновенные дифференциальные уравнения, поэтому в дальнейшем для краткости слово «обыкновенные» будем опускать.)

В общем случае *дифференциальное уравнение n-го порядка* может быть записано в виде

$$\Phi(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0. \qquad (11.1)$$

Если уравнение (11.1) удается разрешить относительно наивысшей производной, то получаем *уравнение в нормальной форме*:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}). \qquad (11.2)$$

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется *интегрированием уравнения*.

Решением (или *интегралом*) *дифференциального уравнения* (*11.1*) (или (*11.2*)) называется любая действительная функция $y = y(x)$, определенная на некотором интервале (a, b) и вместе со своими производными обращающая данное дифференциальное уравнение в тождество. (При этом производные функции $y = y(x)$ предполагаются существующими.)

Пример 1. Доказать, что функция $y = xe^{2x}$, определенная на всей числовой оси, является решением дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 4y = 0$.

▸ Подставив в данное уравнение саму функцию и ее производные $y' = e^{2x}(1+2x)$, $y'' = 4e^{2x}(1+x)$, получим тождество:

$$4e^{2x}(1+x) - 4e^{2x}(1+2x) + 4xe^{2x} = 4e^{2x}(1+x-1-2x+x) \equiv 0. \blacktriangleleft$$

Пример 2. Доказать, что функция $y = y(x)$, заданная в неявном виде: $F(x, y) \equiv \ln\dfrac{y}{x} - 5 - xy = 0$, обращает дифференциальное уравнение $(x + x^2 y)y' = y - xy^2$ в тождество, т.е. является его решением.

▸Действительно, согласно правилу дифференцирования неявной функции $F(x, y) = 0$

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{y - 1/x}{x + 1/y} = \frac{y}{x}\,\frac{1 - xy}{1 + xy} = \frac{y - xy^2}{x + x^2 y}.$$

Подставив найденную производную y' в исходное дифференциальное уравнение, получим тождество. ◂

Если функция, являющаяся решением дифференциального уравнения, определена в неявном виде: $F(x, y) = 0$, то $F(x, y) = 0$ называется интегралом (а не решением) данного дифференциального уравнения. Так, в примерах 1 и 2 имеем соответственно решение и интеграл заданных дифференциальных уравнений.

График решения (или интеграла) дифференциального уравнения (11.1) (или (11.2)) на плоскости Oxy называется *интегральной линией*. Следовательно, каждому решению (или интегралу) соответствует интегральная линия.

Вопрос о существовании и единственности решения дифференциального уравнения (11.2) разрешает приведенная ниже теорема.

Теорема 1 (существования и единственности решения). *Если правая часть уравнения (11.2) является непрерывной функцией в окрестности значений*

$$x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}, \tag{11.3}$$

то уравнение (11.2) имеет решение $y = y(x)$ в некотором интервале (a, b), содержащем x_0 такое, что

$$y(x_0) = y_0,\ \ y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{11.4}$$

Если в указанной окрестности непрерывны еще и частные производные этой функции по аргументам $y, y', ..., y^{(n-1)}$, то решение $y = y(x)$ – единственное.

Числа из совокупности (11.3) называются *начальными данными*, а равенства (11.4) – *начальными условиями*.

Задача Коши для дифференциального уравнения n-го порядка формулируется следующим образом. Найти решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения (11.1) или (11.2), удовлетворяющее начальным данным (11.3), т.е. такое решение, чтобы выполнялись начальные условия (11.4).

Любое дифференциальное уравнение (11.2) в области, удовлетворяющей теореме 1, имеет бесчисленное множество решений. Вообще говоря, это справедливо и для дифференциального уравнения (11.1). Для описания этих множеств решений вводится понятие общего решения.

Общим решением дифференциального уравнения (11.1) или *(11.2)* называется функция вида $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ или короче $y = \varphi(x, C_i)$, где C_i $(i = \overline{1, n})$ – произвольные постоянные, удовлетворяющая следующим двум условиям:

1) она является решением дифференциального уравнения (11.1) или (11.2) при любых значениях C_i;

2) для любых начальных данных $x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$, при которых дифференциальное уравнение имеет решение, можно указать значения постоянных $C_i = C_{i0}$ такие, что будут выполнены начальные условия $\varphi(x_0, C_{i0}) = y_0$, $\varphi'(x_0, C_{i0}) = y'_0, ..., \varphi^{(n-1)}(x_0, C_{i0}) = y_0^{(n-1)}$.

Общее решение, полученное в неявном виде: $\Phi(x, y, C_i) = 0$, называется *общим интегралом дифференциального уравнения*.

Решение (интеграл), полученное из общего решения (общего интеграла) при фиксированных значениях произвольных постоянных C_i, называется *частным решением* (*частным интегралом*) *дифференциального уравнения*.

З а м е ч а н и е. У дифференциального уравнения может существовать решение (интеграл), которое невозможно получить из общего решения ни при каких значениях произвольных постоянных C_i. Такое решение (интеграл) может оказаться о с о б ы м в том смысле, что в любой его точке нарушаются какие-либо условия теоремы 1. Например, дифференциальное уравнение $y'' = 3\sqrt[3]{(y'-1)^2}$ имеет общее решение $y = x + \frac{1}{4}(x + C_1)^4 + C_2$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Функция $y = x + C$, где C – произвольная постоянная, также является решением данного уравнения, но это решение не может быть получено из общего ни при каких значениях C_1 и C_2. Кроме того, $y'=1$ для любой точки решения, что приводит к нарушению условия единственности из теоремы 1, ибо частная производная правой части данного уравнения по y' при $y'=1$ разрывна. Следовательно, решение $y=x+C$ является особым. В дальнейшем особые решения, как правило, рассматриваться не будут.

Отметим, что теория неопределенного интеграла по существу является теорией класса простейших дифференциальных уравнений вида $y'=f(x)$, общее решение которых

$$y=\int f(x)dx=F(x)+C,$$

где $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, т.е. $F'(x)=f(x)$; C – произвольная постоянная.

В общем случае *дифференциальное уравнение первого порядка* может быть записано в виде

$$F(x, y, y')=0 \qquad (11.5)$$

или, если разрешить его относительно y', в нормальной форме:

$$y'=f(x, y). \qquad (11.6)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2 (существования и единственности решения). *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в точке $M_0(x_0, y_0)$ и в ее окрестности, то существует решение $y=y(x)$ уравнения (11.6) такое, что $y(x_0)=y_0$. Если непрерывна также частная производная $\partial f/\partial y$ данной функции, то это решение единственно.*

Отметим, что иногда дифференциальное уравнение первого порядка удобно записывать в так называемой *дифференциальной форме*:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0. \qquad (11.7)$$

Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка имеет следующую формулировку: найти решение $y=\varphi(x)$ (интеграл $\Phi(x, y)=0$) дифференциального уравнения (11.5) или (11.6), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(x_0)=y_0$ ($\Phi(x_0, y_0)=0$). С геометрической точки зрения это означает, что среди всех интегральных линий данного уравнения необходимо найти ту, которая проходит через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$.

Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения (11.6) состоит в том, что оно в каждой точке $M(x,y)$, принадлежащей области D, в которой выполняются все условия теоремы 2, задает направление $y' = \operatorname{tg}\alpha = k$ касательной к единственной интегральной линии уравнения (11.6), проходящей через точку $M(x, y)$, т.е. *поле направлений* в области D (рис. 11.1).

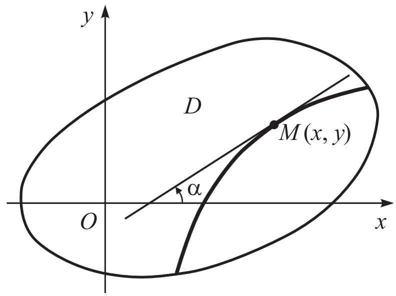

Рис. 11.1

В области D для уравнения (11.6) можно выделить однопараметрическое семейство линий $f(x, y) = k = \text{const}$, каждая из которых называется *изоклиной*. Как следует из определения, вдоль каждой изоклины поле направлений постоянно, т.е. $y' = k = \text{const}$.

Нахождение изоклин и направлений вдоль них позволяет упорядочить поле направлений и приближенно построить интегральные линии данного дифференциального уравнения, т.е. графически проинтегрировать это уравнение.

Пример 3. Методом изоклин приближенно построить интегральные линии дифференциального уравнения $y' = -2y / x$.

▶ Полагая $-2y / x = k$ $(k = \text{const})$, находим изоклины $y = -\dfrac{k}{2}x$ данного уравнения. Они представляют собой проходящие через начало координат прямые линии, вдоль которых поле направлений определяется равенством $y' = k = \operatorname{tg}\alpha$. Придавая k различные значения, находим соответствующие изоклины, вдоль которых направление поля характеризуется углом α наклона к оси Ox касательной к интегральной линии. Необходимые вычисления запишем в виде табл. 11.1.

Таблица 11.1

k	0	$\pm 1/\sqrt{3}$	± 1	$\pm\sqrt{3}$	± 2	± 3	$\pm\infty$
α	0	$\pm 30°$	$\pm 45°$	$\pm 60°$	$\pm 64°$	$\approx \pm 72°$	$\pm 90°$
$y = -kx/2$	$y = 0$	$y = \mp x/(2\sqrt{3})$	$y = \mp x/2$	$y = \mp\sqrt{3}x/2$	$y = \mp x$	$y = \mp 3x/2$	$x = 0$

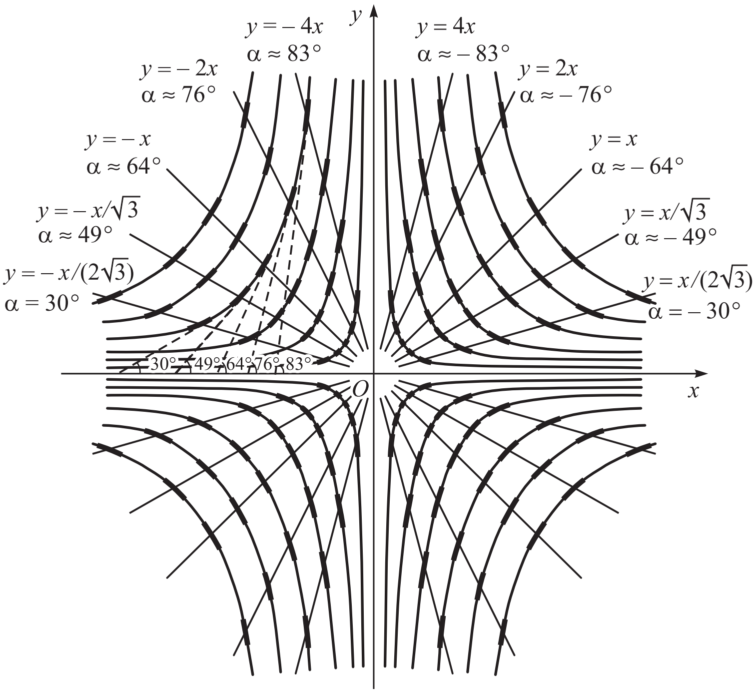

Рис. 11.2

По данным табл. 11.1 строим поле направлений (рис. 11.2) и затем приближенно вычерчиваем интегральные линии. Положительное или отрицательное значение угла α указывает на то, что он отсчитывается от оси Ox против хода или по ходу часовой стрелки соответственно. ◀

11.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения

Уравнение вида

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0 \tag{11.8}$$

называется *дифференциальным уравнением с разделенными переменными*. Его общим интегралом будет

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C, \tag{11.9}$$

где C – произвольная постоянная.

Уравнение вида

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \tag{11.10}$$

или

$$y' = \frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y), \tag{11.11}$$

а также уравнения, которые с помощью алгебраических преобразований приводятся к уравнению (11.10) или (11.11), называются *уравнениями с разделяющимися переменными*.

Разделение переменных в уравнениях (11.10), (11.11) выполняется следующим образом. Предположим, что $N_1(y) \neq 0$, $M_2(x) \neq 0$, и разделим обе части уравнения (11.10) на $N_1(y)M_2(x)$. Обе части уравнения (11.11) умножим на dx и разделим на $f_2(y) \neq 0.$ В результате получим уравнения с разделенными переменными (т.е. уравнения вида (11.8)):

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0, \quad f_1(x)dx - \frac{dy}{f_2(y)} = 0,$$

которые интегрируются согласно формуле (11.9).

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(xy + y)dx + (xy + x)dy = 0. \tag{1}$$

▸ Предположив, что $x \neq 0,$ $y \neq 0,$ и разделив обе части данного уравнения на xy, получим уравнение с разделенными переменными:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)dx + \left(1 + \frac{1}{y}\right)dy = 0.$$

Интегрируя его, согласно формуле (11.9) последовательно находим (произвольную постоянную можно представить в виде $\ln|C|$):

$$\int\left(1 + \frac{1}{x}\right)dx + \int\left(1 + \frac{1}{y}\right)dy = \ln|C|,$$

$$x + \ln|x| + y + \ln|y| = \ln|C|,$$

$$\ln|xy| + \ln e^{x+y} = \ln|C|, \quad xye^{x+y} = C.$$

Последнее равенство является общим интегралом уравнения (1). При его нахождении были приняты ограничения $x \neq 0,\ y \neq 0,$ однако функции $x=0$ и $y=0$ также являются решениями исходного уравнения, что легко проверяется. Но эти функции получаются из общего интеграла при $C=0$. Следовательно, $x=0$, $y=0$ – частные решения уравнения (1). ◀

Пример 2. Найти частное решение уравнения

$$(1+e^{2x})y^2y' = e^x,$$

удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$.

▶ Запишем данное уравнение в дифференциальной форме (см. формулу (11.7)):

$$(1+e^{2x})y^2dy - e^xdx = 0.$$

Теперь разделим переменные:

$$y^2dy - \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = 0.$$

Проинтегрируем последнее уравнение:

$$\int y^2dy - \int\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \frac{C}{3}, \quad \frac{y^3}{3} - \operatorname{arctg} e^x = \frac{C}{3}, \quad y = \sqrt[3]{C + 3\operatorname{arctg} e^x}.$$

Получили общее решение исходного уравнения.

Использовав начальное условие, определим значение произвольной постоянной:

$$1 = \sqrt[3]{C + \frac{3}{4}\pi}, \quad C = 1 - \frac{3}{4}\pi.$$

Следовательно, частное решение исходного уравнения имеет вид

$$y = \sqrt[3]{1 - \frac{3}{4}\pi + 3\operatorname{arctg} e^x}. \text{ ◀}$$

Функция $f(x, y)$ называется *однородной функцией порядка* α относительно аргументов x и y, если равенство $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$ справедливо для любого $t \in \mathbf{R}$, при котором функция $f(tx, ty)$ определена, $\alpha = \mathrm{const}$. Например, функция $f(x, y) = 3x^4 - x^2y^2 + 5y^4$ является однородной четвертого порядка ($\alpha = 4$), так как

$$f(tx, ty) = 3(tx)^4 - (tx)^2(ty)^2 + 5(ty)^4 = t^4(3x^4 - x^2y^2 + 5y^4) = t^4 f(x, y).$$

Функция $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{xy} + 4\sqrt[3]{y^2}$ является однородной порядка $\alpha = 2/3$, поскольку

$$f(tx,ty)=\sqrt[3]{(tx)^2}-2\sqrt[3]{(tx)(ty)}+4\sqrt[3]{(ty)^2}=$$
$$=\sqrt[3]{t^2}(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{xy}+4\sqrt[3]{y^2})=t^{2/3}f(x,y).$$

Если $\alpha=0$, то функция будет однородной нулевого порядка.

Например, $f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}\ln\left(\frac{x^2}{y^2}+1\right)$ – однородная функция нулевого порядка, так как

$$f(tx,ty)=\frac{tx-ty}{tx+ty}\ln\left(\frac{(tx)^2}{(ty)^2}+1\right)=\frac{t(x-y)}{t(x+y)}\ln\left(\frac{t^2x^2}{t^2y^2}+1\right)=$$
$$=\frac{x-y}{x+y}\ln\left(\frac{x^2}{y^2}+1\right)=f(x,y),$$

где $t\neq 0$.

Дифференциальное уравнение в нормальной форме

$$y'=\frac{dy}{dx}=f(x,y) \qquad (11.12)$$

называется *однородным* относительно переменных x и y, если $f(x,y)$ – однородная функция нулевого порядка относительно своих аргументов, т.е.

$$f(tx,ty)=t^0f(x,y)=f(x,y).$$

Дифференциальное уравнение в дифференциальной форме

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

будет однородным в том и только в том случае, когда $P(x,y)$, $Q(x,y)$ – однородные функции одного и того же порядка α, т.е. $P(tx,ty)=t^\alpha P(x,y)$, $Q(tx,ty)=t^\alpha Q(x,y)$. Действительно, переписав его в нормальной форме:

$$y'=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}\equiv f(x,y),$$

легко заключаем, что $f(x,y)$ – однородная функция нулевого порядка, так как

$$f(tx,ty)=-\frac{P(tx,ty)}{Q(tx,ty)}=-\frac{t^\alpha P(x,y)}{t^\alpha Q(x,y)}=f(x,y).$$

Поскольку однородное дифференциальное уравнение (11.12) в нормальной форме всегда можно записать в виде $y' = f(x, y) = f(tx, ty)$, то, положив $t = 1/x$, получим:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Следовательно, уравнение (11.12) с помощью замены $y = xu$ $(u = y/x,\ y' = u + xu')$ сводится к уравнению с разделяющимися переменными относительно x и новой функции $u(x)$:

$$u + xu' = \varphi(u), \quad x\frac{du}{dx} = \varphi(u) - u.$$

Пример 3. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $2x^2y' = x^2 + y^2$ и найти его частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$.

▶ Функции $2x^2$ и $x^2 + y^2$ – однородные второго порядка, поэтому данное уравнение – однородное. Сделаем замену $y = xu$, $y' = u + xu'$. Тогда

$$2x^2(u + xu') = x^2 + (xu)^2, \quad 2x^2(u + xu') = x^2(1 + u^2).$$

Полагая, что $x \neq 0$, сокращаем обе части уравнения на x^2. Далее имеем:

$$2u + 2x\frac{du}{dx} = 1 + u^2, \quad 2xdu = (1 + u^2 - 2u)dx.$$

Разделяя переменные, последовательно находим:

$$\int\frac{du}{1 + u^2 - 2u} = \int\frac{dx}{2x}, \quad \int\frac{d(u-1)}{(u-1)^2} = \frac{1}{2}\ln|x|,$$

$$-\frac{1}{u-1} = \frac{1}{2}\ln|x| + \ln C, \quad 1 = (1-u)\ln\left(C\sqrt{|x|}\right).$$

В последнее выражение вместо u подставим значение y/x. Получим общий интеграл:

$$1 = \left(1 - \frac{y}{x}\right)\ln\left(C\sqrt{|x|}\right), \quad x = (x - y)\ln\left(C\sqrt{|x|}\right).$$

Разрешив его относительно y, найдем общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y = x - \frac{x}{\ln\left(C\sqrt{|x|}\right)}.$$

Использовав начальное условие $y(1)=0$, определим значение C:

$$0=1-\frac{1}{\ln C},\quad \ln C=1,\quad C=e.$$

Следовательно, частное решение исходного уравнения имеет вид

$$y=x-\frac{x}{1+\ln\sqrt{|x|}}. \blacktriangleleft$$

11.3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли

Уравнение

$$y'+P(x)y=Q(x), \tag{11.13}$$

линейное относительно неизвестной функции y и ее производной y' (а также любое уравнение, которое с помощью алгебраических преобразований приводится к виду (11.13)), называется *неоднородным линейным дифференциальным уравнением первого порядка*. Функции $P(x)\not\equiv 0$, $Q(x)\not\equiv 0$ должны быть непрерывными в некоторой области, например на отрезке $[a, b]$, для того чтобы выполнялись условия теоремы 1 существования и единственности решения (см. теорему 2 из § 11.1). Общее решение уравнения (11.13) всегда можно записать в виде

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right), \tag{11.14}$$

где C – произвольная постоянная.

Таким образом, общее решение уравнения (11.13) всегда представимо в квадратурах, т.е. выражается через интегралы от известных функций $P(x)$, $Q(x)$. Отметим, что при нахождении интегралов из решения (11.14) произвольные постоянные можно считать равными нулю или, что то же самое, считать их включенными в произвольную постоянную C.

Если в уравнении (11.13) $Q(x)\equiv 0$ или $P(x)\equiv 0$, то получим дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, общее решение которых определяется из уравнения (11.14) при $Q(x)\equiv 0$ или $P(x)\equiv 0$ соответственно. В случае, когда $Q(x)\equiv 0$, уравнение (11.13) называют *однородным линейным дифференциальным уравнением*.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $(x^2-x)y'+y=x^2(2x-1)$. Решить задачу Коши при начальном условии $y(-2)=2$.

▶ Приведем данное уравнение к виду (11.13), разделив обе его части на $x^2-x\neq 0$. Получим:

$$y'+\frac{y}{x^2-x}=\frac{x^2(2x-1)}{x^2-x}.$$

Здесь

$$P(x)=\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{x(x-1)},\quad Q(x)=\frac{x^2(2x-1)}{x(x-1)}=\frac{x(2x-1)}{x-1}.$$

В соответствии с формулой (11.14) общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y=e^{-\int\frac{dx}{x(x-1)}}\left(\int\frac{x(2x-1)}{x-1}e^{\int\frac{dx}{x(x-1)}}dx+C\right). \tag{1}$$

Найдем входящие в это решение интегралы. Имеем:

$$\int\frac{dx}{x(x-1)}=\left|\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}=\frac{1}{x(x-1)},\quad A=-1,\quad B=1\right|=\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}\right)dx=$$

$$=-\ln|x|+\ln|x-1|=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|,$$

$$\int\frac{x(2x-1)}{x-1}e^{\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|}dx=\int\frac{x(2x-1)}{x-1}\left|\frac{x-1}{x}\right|dx=\pm\int(2x-1)dx=\pm(x^2-x),$$

где знаки «+» и «–» появляются в силу равенства $\left|\frac{x-1}{x}\right|=\pm\frac{x-1}{x}$.

Подставляя найденные интегралы в решение (1), окончательно получаем общее решение исходного уравнения:

$$y=e^{-\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|}(\pm(x^2-x)+C)=\left|\frac{x}{x-1}\right|(\pm(x^2-x)+C)=$$

$$=\pm\frac{x}{x-1}(\pm x(x-1)+C)=x^2+\frac{Cx}{x-1}.$$

Из него выделяем частное решение, соответствующее начальному условию $y(-2)=2$:

$$2=4-\frac{2C}{-2-1},\quad C=-3,\quad y=x^2-\frac{3x}{x-1}.$$ ◀

Полезно иметь в виду, что иногда дифференциальное уравнение является линейным относительно x как функции y, т.е. может быть приведено к виду

$$\frac{dx}{dy}+p(y)x=q(y). \qquad (11.15)$$

Его общее решение находится по формуле

$$x=e^{-\int p(y)dy}(\int q(y)e^{\int p(y)dy}dy+C). \qquad (11.16)$$

Пример 2. Найти общий интеграл уравнения $(2x-y^2)y'=2y,\ y'=\dfrac{dy}{dx}$.

▶ Данное уравнение является линейным относительно функции $x(y)$. Действительно,

$$(2x-y^2)\frac{dy}{dx}=2y,\quad 2x-y^2=2y\frac{dx}{dy},\quad \frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}-\frac{y}{2},$$

$$\frac{dx}{dy}-\frac{x}{y}=-\frac{y}{2},\quad p(y)=-\frac{1}{y},\quad q(y)=-\frac{y}{2},$$

т.е. получили уравнение вида (11.15). Согласно формуле (11.16) общее решение исходного уравнения имеет вид

$$x=e^{\int\frac{dy}{y}}\left(-\int\frac{y}{2}e^{-\int\frac{dy}{y}}dy+C\right)=e^{\ln|y|}\left(-\int\frac{y}{2}e^{-\ln|y|}dy+C\right)=$$

$$=|y|\left(-\frac{1}{2}\int\frac{y}{|y|}dy+C\right)=-\frac{y}{2}\int dy+Cy=Cy-\frac{1}{2}y^2. ◀$$

Отметим, что линейное дифференциальное уравнение (11.13) можно также проинтегрировать *методом Бернулли,* суть которого заключается в следующем. Введем две неизвестные функции $u(x)$ и $v(x)$ по формуле $y=u(x)v(x)$ (*подстановка Бернулли*). Тогда $y'=u'v+uv'$. Подставив выражения для y и y' в уравнение (11.13), получим уравнение $u'v+uv'+P(x)uv=Q(x)$, которое преобразуем к виду

$$(v'+P(x)v)u+u'v=Q(x). \qquad (11.17)$$

Пользуясь тем, что одна из неизвестных функций, например v, может быть выбрана достаточно произвольно (только произведение uv должно удовлетворять исходному уравнению (11.13)), принимаем в качестве v любое частное решение $v=v(x)$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Рябушко Антон Петрович
Жур Татьяна Антоновна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Теория и задачи

Учебное пособие

В пяти частях
Часть 3

Обыкновенные дифференциальные уравнения.
Ряды.
Кратные интегралы

Редактор *Е.В. Малышева*
Художественный редактор *В.А. Ярошевич*
Технический редактор *Н.А. Лебедевич*
Корректор *Т.В. Кульнис*
Компьютерная верстка *М.В. Горецкой*

Подписано в печать 29.06.2017. Формат 84×108/32. Бумага офсетная.
Гарнитура «Ньютон». Офсетная печать. Усл. печ. л. 16,8. Уч.-изд. л. 16,5.
Тираж 600 экз. Заказ 1960.

Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Вышэйшая школа”».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/3 от 08.07.2013.
Пр. Победителей, 11, 220004, Минск.
e-mail: market@vshph.com   http://vshph.com

Открытое акционерное общество «Типография “Победа”».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 2/38 от 29.01.2014.
Ул. Тавлая, 11, 222310, Молодечно.