Г. А. Расолько Ю. А. Кремень

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Практикум с использованием **MathCad**

Допущено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия
для студентов учреждений высшего образования
по математическим специальностям

Минск
«Вышэйшая школа»
2019

УДК 514.12(076.58)
ББК 22.151.5я73
Р24

Р е ц е н з е н т ы: кафедра фундаментальной и прикладной математики учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы» (кандидат физико-математических наук, доцент *К.А. Смотрицкий*; заведующий кафедрой профессор *Е.А. Ровба*); профессор кафедры высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный аграрный технический университет» доктор физико-математических наук *И.В. Белько*

Расолько, Г. А.
Р24 Аналитическая геометрия : практикум с использованием MathCad : учебное пособие / Г. А. Расолько, Ю. А. Кремень. – Минск : Вышэйшая школа, 2019. – 271 с. : ил.
ISBN 978-985-06-2945-6.

Учебное пособие соответствует образовательному стандарту по специальности «Математика», программе курса аналитической геометрии и методическим требованиям. Последовательность изложения материала, использование системы компьютерной математики на примере MathCad отличают данное пособие от традиционных.

Для студентов учреждений высшего образования по специальностям, предполагающим изучение аналитической геометрии.

УДК 514.12(076.58)
ББК 22.151.5я73

ISBN 978-985-06-2945-6

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель данного учебного пособия — научить быстро и легко решать стандартные задачи из курса аналитической геометрии в интегрированной среде MathCad. Авторами разработан комплекс программных модулей в среде MathCad, позволяющий достаточно просто решать как опорные, так и стандартные задачи данного курса. Применение системы компьютерной математики (СКМ) в процессе обучения не является самоцелью и никоим образом не может полностью заменить традиционные методы обучения. Тем не менее использование таких средств информационных технологий на практических занятиях и во время проведения управляемой самостоятельной работы студентов позволяет не только находить аналитические или численные решения многих задач аналитической геометрии, но и осуществить визуализацию полученных результатов, что облегчает восприятие студентами материала, дает возможность на занятиях рассмотреть гораздо больше примеров и достаточно времени уделить качественному анализу полученных результатов.

Данное учебное пособие состоит из следующих разделов: «Простейшие задачи аналитической геометрии», «Плоскость», «Линии», «Линии второго порядка», «Отдельные вопросы теории поверхностей». Каждый раздел содержит краткие теоретические сведения и практическую часть, в которой предлагается решение различных задач. Каждая задача включает формулировку одного или нескольких заданий, описание математических методов решения задач, порядок выполнения работы в среде MathCad, пример решения типовой задачи с приведением фрагмента или полного текста рабочего документа MathCad, снабженного комментариями и краткими указаниями, которые помогают реализовать решение задачи на компьютере. Читателю, не знакомому с MathCad, следует начать чтение пособия с приложения «MathCad. Краткий справочник пакета».

Современный образовательный процесс в учреждении высшего образования характеризуется высокой интенсивностью. Повышение эффективности обучения в современных условиях невозможно без использования систем компьютерной математики, которые освобождают учебный процесс от трудоемких и неэффективных расчетов и построения графиков вручную и позволяют преподавателю сконцентрировать основные усилия на постановке задачи, выборе алгоритма ее решения, интерпретации результатов. Характерной особенностью пакета MathCad является использование привычных стандартных математических обозначений. MathCad — среда визуального программирования, т.е. документ на экране выглядит так же, как обычный математический расчет. Простота освоения пакета, дружественный интерфейс, невысокие требования к возможностям компьютера стали главными причинами того, что именно этот пакет был выбран нами для обучения.

В последние годы появились учебные пособия по различным математическим (и не только) дисциплинам с использованием MathCad (см., например: Дифференциальные уравнения. Практикум: учебное пособие / Л.А. Альсевич [и др.]. Минск: Вышэйшая школа, 2012). На примере наших разработок можно выполнять многие расчеты как в более ранних, так и в последующих версиях.

Благодаря встроенным возможностям для численных и символьных вычислений и решения различных типов уравнений и неравенств эффективность MathCad особенно высока при изучении курса вузовской математики. Операторы программирования в MathCad, хотя и содержат основные конструкции языков высокого уровня, ориентированы скорее на усвоение начинающими пользователями СКМ общих принципов алгоритмизации, чем на разветвленное искусное программирование, без которого невозможно решение сложных прикладных задач, возникающих при изучении целого ряда дисциплин, в том числе и аналитической геометрии.

Все отзывы и пожелания просим присылать по адресу: 220050, Минск, пр. Независимости, 4, кафедра веб-технологий и компьютерного моделирования, механико-математический факультет, Белорусский государственный университет.

Авторы

1

ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1.1. Теоретические сведения

Рассмотрим в пространстве декартову систему координат $Oxyz$ и точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Расстояние между двумя точками в пространстве выражается уравнением

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1.1)$$

Расстояние между двумя точками $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ на плоскости определяется выражением

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1.2)$$

Пусть даны две различные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Координаты точки $M(x, y, z)$, *делящей отрезок* M_1M_2 в данном отношении λ, вычисляются по следующим формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \quad (1.3)$$

Координаты x, y, z центра тяжести системы из n точек $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, с массами m_i рассчитываются по формулам

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad y = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad z = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}. \quad (1.4)$$

Для вычисления *площади треугольника с вершинами* $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ применяется формула

$$\pm S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left|(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_1)\right| \quad (1.5)$$

или

$$\pm S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}. \tag{1.6}$$

Площадь произвольного плоского многоугольника (не обязательно выпуклого) с вершинами в точках (x_1, y_1), …, (x_n, y_n) определяется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i+1})(y_i + y_{i+1})\right|, \tag{1.7}$$

при этом $x_{n+1} = x_1$, $y_{n+1} = y_1$.

Длина вектора $\vec{a}$ вычисляется следующим образом:

- если $\vec{a} = (a_1, a_2)$ – некоторый вектор на плоскости, то

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}; \tag{1.8}$$

- если $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ – некоторый вектор в пространстве, то

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \tag{1.9}$$

Скалярное произведение:

- векторов $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2; \tag{1.10}$$

- векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \tag{1.11}$$

Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ – некоторые векторы, то их *векторное произведение* вычисляется так:

$$[\vec{a}\vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right). \tag{1.12}$$

Смешанное произведение трех векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ определяется как

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{1.13}$$

Смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ равно нулю, если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарны.

Если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – некомпланарны, то геометрический смысл смешанного произведения заключается в том, что $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \pm V$, где V – объем параллелепипеда, построенного на перемножаемых векторах, взятый со знаком плюс, если тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая, или со знаком минус – если левая (параллелепипед построен на отрезках векторов $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ таких, что $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}, \vec{c} = \overrightarrow{OC}$).

Ориентированный объем треугольной пирамиды с вершинами в точках $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$, $P_4(x_4, y_4, z_4)$:

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}. \tag{1.14}$$

Если $V = 0$, то четыре точки лежат в одной плоскости (необходимое и достаточное условие).

Связь между декартовыми (x, y) *и полярными* (ρ, φ) *координатами* точки M выражается формулами

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad \rho \geqslant 0, \quad -\pi < \varphi \leqslant \pi \ \left(\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}\right). \tag{1.15}$$

И наоборот, *связь между полярными* (ρ, φ) *и декартовыми* (x, y) *координатами* точки M выражается формулами

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{1.16}$$

Цилиндрическими координатами точки M называются числа ρ, φ, z, связанные с прямоугольными координатами x, y, z формулами

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z, \tag{1.17}$$

где $0 \leqslant \rho < \infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$.

Координатные поверхности: круговые цилиндры ($\rho = \text{const}$), полуплоскости ($\varphi = \text{const}$), плоскости ($z = \text{const}$).

Обобщенными цилиндрическими координатами называются числа u, v, w, связанные с прямоугольными координатами x, y, z формулами

$$x = au\cos v, \quad y = bu\sin v, \quad z = cw, \tag{1.18}$$

где $0 \leqslant u < \infty$, $0 \leqslant v < 2\pi$, $-\infty < w < \infty$.

Координатные поверхности: эллиптические цилиндры ($u = \text{const}$), полуплоскости ($v = \text{const}$), плоскости ($w = \text{const}$).

Сферическими координатами точки M называются числа ρ, θ, φ, связанные с прямоугольными координатами x, y, z формулами

$$x = \rho\cos\varphi\sin\theta, \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\theta, \tag{1.19}$$

где $0 \leqslant \rho < \infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Обобщенными сферическими координатами точки M называются числа u, v, w, связанные с прямоугольными координатами x, y, z формулами

$$x = au\rho\cos v\sin w, \quad y = bu\sin v\sin w, \quad z = cu\cos w, \tag{1.20}$$

где $0 \leqslant u < \infty$, $0 \leqslant v < 2\pi$, $0 \leqslant w \leqslant \pi$, $a > b$, $b > 0$.

Координатные поверхности: эллипсоиды ($u = \text{const}$), полуплоскости ($v = \text{const}$), эллиптические конусы ($w = \text{const}$).

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Опорные задачи

ЗАДАЧА 1.1

Найти расстояние между двумя точками на плоскости и в пространстве.

Задание

Найти расстояние между двумя точками:

а) $X(1, 4)$, $Y(3, 1)$;

б) $A(-1, 1, -1)$, $B(2, -3, -5)$;

в) $Z(23, 4)$, $V(20, 55)$;

г) $C(-5, 4, 3)$, $D(77, 66, 44)$.

Алгоритм решения

Введем функцию, которая вычисляет расстояние между двумя точками M_1 и M_2 с учетом размерности пространства по формуле (1.1) или (1.2)

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Решение в MathCad

Функция ρ

Назначение: вычисляет расстояние между двумя точками по формуле (1.1) или (1.2).

Прототип: ρ(`M1, M2`).

Параметры: `M1`, `M2` — вектор-столбцы, содержащие координаты точек M_1 и M_2 соответственно.

Возвращаемое значение: расстояние между двумя точками.

Используемые встроенные функции MathCad: `rows(A)` — количество столбцов матрицы `A`.

Реализация:

$$\mathrm{ORIGIN} \equiv 1$$

$$\rho(\mathrm{M1},\mathrm{M2}) := \left| \begin{array}{l} \rho \leftarrow (\mathrm{M2}-\mathrm{M1})\cdot(\mathrm{M2}-\mathrm{M1}) \\ \sqrt{\rho} \end{array} \right.$$

или

$$\rho(\mathrm{M1},\mathrm{M2}) := \sqrt{(\mathrm{M2}-\mathrm{M1})\cdot(\mathrm{M2}-\mathrm{M1})}$$

Выполнение задания

$$\mathrm{ORIGIN} \equiv 1$$

$$\rho(\mathrm{M1},\mathrm{M2}) := \left| \begin{array}{l} \rho \leftarrow (\mathrm{M2}-\mathrm{M1})\cdot(\mathrm{M2}-\mathrm{M1}) \\ \sqrt{\rho} \end{array} \right.$$

$$\mathrm{X} := (1\ \ 4)^{\mathrm{T}} \qquad \mathrm{Y} := (3\ \ 1)^{\mathrm{T}} \qquad \rho(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \rightarrow \sqrt{13}$$

$$\mathrm{Z} := (23\ \ 4)^{\mathrm{T}} \qquad \mathrm{V} := (20\ \ 55)^{\mathrm{T}} \qquad \rho(\mathrm{Z},\mathrm{V}) \rightarrow 3\cdot\sqrt{290}$$

$$\mathrm{A} := (-1\ \ 1\ \ -1)^{\mathrm{T}} \qquad \mathrm{B} := (2\ \ -3\ \ 5)^{\mathrm{T}} \qquad \rho(\mathrm{A},\mathrm{B}) \rightarrow \sqrt{61}$$

$$\mathrm{C} := (-5\ \ 4\ \ 3)^{\mathrm{T}} \qquad \mathrm{D} := (77\ \ 66\ \ 44)^{\mathrm{T}} \qquad \rho(\mathrm{C},\mathrm{D}) \rightarrow 3\cdot\sqrt{1361}$$

ЗАДАЧА 1.2

Разделить некоторый отрезок в заданном отношении.

Задание

Даны две точки. Разделить отрезок с концами в этих точках в заданном отношении λ:

а) $X(2,4)$, $Y(2,0)$, $\lambda = 1$;

б) $A(-1,1,-1)$, $B(2,-3,-5)$, $\lambda = \frac{1}{3}$;

в) $Z(3,4)$, $V(20,55)$, $\lambda = \frac{1}{2}$;

г) $C(-5,4,3)$, $D(7,6,4)$, $\lambda = \frac{1}{2}$.

Алгоритм решения

Пусть даны две различные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Введем функцию, которая делит отрезок M_1M_2 в заданном отношении λ по формулам (1.3)

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Решение в MathCad

Функция Divλ

Назначение: делит отрезок в заданном отношении λ по формулам (1.3).

Прототип: `Divλ(A, B, λ)`.

Параметры: `A` – вектор-столбец, содержащий координаты первой точки *A* отрезка; `B` – вектор-столбец, содержащий координаты второй точки *B* отрезка; `λ` – число, определяющее, в каком отношении делится отрезок *AB*.

Возвращаемое значение: вектор-столбец, содержащий координаты точки, делящей отрезок *AB* в данном отношении λ.

Реализация:

$$\mathrm{Div}\lambda(A, B, \lambda) := \frac{A + \lambda \cdot B}{1 + \lambda}$$

Выполнение задания

$$\mathrm{ORIGIN} \equiv 1$$

$$\mathrm{Div}\lambda(A, B, \lambda) := \frac{A + \lambda \cdot B}{1 + \lambda}$$

$X := (2\ \ 4)^T \qquad Y := (2\ \ 0)^T$

$M1 := \mathrm{Div}\lambda(X, Y, 1) \qquad M1^T \rightarrow (2\ \ 2)$

$Z := (3\ \ 4)^T \qquad V := (20\ \ 55)^T$

$M2 := \mathrm{Div}\lambda\left(Z, V, \frac{1}{2}\right) \qquad M2^T \rightarrow \left(\frac{26}{3}\ \ 21\right)$

$A := (-1\ \ 1\ \ -1)^T \qquad B := (2\ \ -3\ \ -5)^T$

$M3 := \mathrm{Div}\lambda\left(A, B, \frac{1}{3}\right) \qquad M3^T \rightarrow \left(-\frac{1}{4}\ \ 0\ \ -2\right)$

$C := (-5\ \ 4\ \ 3)^T \qquad D := (7\ \ 6\ \ 4)^T$

$M4 := \mathrm{Div}\lambda\left(C, D, \frac{1}{2}\right) \qquad M4^T \rightarrow \left(-1\ \ \frac{14}{3}\ \ \frac{10}{3}\right)$

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Расолько Галина Алексеевна
Кремень Юрий Алексеевич

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Практикум с использованием MathCad

Учебное пособие

Редактор *Е.В. Савицкая*
Художественный редактор *В.А. Ярошевич*
Технический редактор *Н.А. Лебедевич*
Корректор *Т.В. Кульнис*
Компьютерная верстка *М.В. Горецкой*

Подписано в печать 12.02.2019. Формат 70×100/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Ньютон». Офсетная печать. Усл. печ. л. 22,1. Уч.-изд. л. 14,9. Тираж 350 экз. Заказ 519.

Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Вышэйшая школа”». Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/3 от 08.07.2013. Пр. Победителей, 11, 220004, Минск. e-mail: market@vshph.com http: // vshph.com

Открытое акционерное общество «Типография “Победа”». Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 2/38 от 29.01.2014. Ул. Тавлая, 11, 222310, Молодечно.