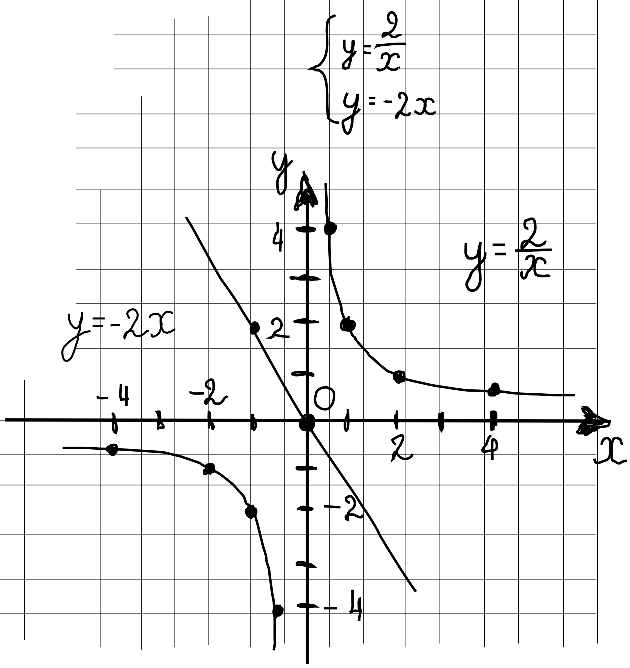
НАГЛЯДНЫЙ СПРАВОЧНИК ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ОГЭ И ЕГЭ



Н.Н. Удалова

МАТЕМАТИКА

МОСКВА
2022

УДК 373:51
ББК 22.1я721
У28

Удалова, Наталья Николаевна.

У28 Математика / Н. Н. Удалова. — Москва : Эксмо, 2022. — 304 с. — (Наглядный справочник для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ).

ISBN 978-5-04-093003-6

Справочник содержит теоретические сведения за весь школьный курс математики, а также практические задания с ответами и пояснениями. Весь материал изложен в наглядной и доступной форме, что способствует быстрому усвоению большого количества информации.

Издание окажет помощь старшеклассникам при подготовке к ОГЭ и ЕГЭ, урокам, различным формам текущего и промежуточного контроля.

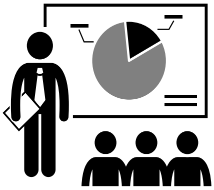
УДК 373:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-04-093003-6

© Удалова Н.Н., 2018
© Оформление. ООО «Издательство «Эксмо», 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ



Перед вами самый удобный справочник, который поможет школьнику систематизировать и закрепить знания по математике за курс средней школы.

Пособие содержит основную и самую важную информацию из курсов арифметики, алгебры, геометрии, начал математического анализа, комбинаторики, теории вероятностей и статистики. Здесь изложены все изучаемые определения, правила, формулы, теоремы.

Материал книги представлен в виде таблиц, схем, рисунков, упорядочен и систематизирован, изложен доступным для усвоения языком. Это обеспечит максимальную сконцентрированность внимания, эффективное повторение и подготовку школьника по предмету.

Теоретический материал сопровождается блоком практических заданий. Приведённые примеры с развёрнутыми разъяснениями позволяют детально разобраться в темах школьного курса и отработать навыки выполнения различных заданий. В отдельном приложении даны примеры решения задач с экономическим содержанием.

Справочник предназначен учащимся средней школы для самоподготовки к различным видам контроля, сдаче ОГЭ и ЕГЭ, а также может использоваться учителями математики для работы на уроке.

Желаем успехов!

АЛГЕБРА

ЧИСЛА, КОРНИ И СТЕПЕНИ

В данном разделе рассматриваются действия с десятичными и обыкновенными дробями, рациональными, иррациональными и действительными числами. Представлены свойства степеней с натуральным, целым, рациональным и действительным показателем.

ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

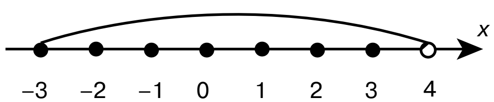
Натуральные числа (1; 2; 3; 4; 5...), числа, им противоположные (–1; –2; –3; –4; –5...), и число нуль образуют множество **целых чисел**.

Множество натуральных (от лат. *naturalis* — природа) чисел имеет специальное обозначение — N; множество целых (нем. *Zahl* — число) чисел — Z.

Практические задания

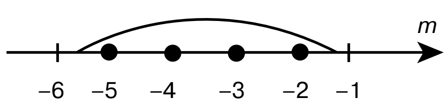
1 Найдите количество целых чисел, удовлетворяющих условию:

а) $x \in [-3; 4)$.



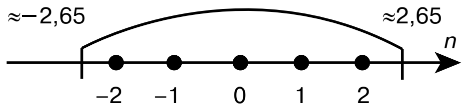
Ответ: 7.

б) $-5{,}6 < m \leq -1{,}3$.



Ответ: 4.

2 Множество чисел задано формулой $x_n = n^2 - 5$, где $n \in Z$. Сколько чисел из данного множества не больше 2?



$$n^2 - 5 \le 2,\ n^2 \le 7,\ -\sqrt{7} \le n \le \sqrt{7}.$$

Ответ: 5.

СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Степенью числа *a* с натуральным показателем *n*, бо́льшим 1, называется произведение *n* множителей, каждый из которых равен *a*.

Например:

$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81;$

$0{,}2^6 = 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}000\,064.$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}}$$

***a* — основание степени**

***n* — показатель степени**

Таблица квадратов

Десятки	Единицы									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Свойства степеней

$a^1 = a$

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, где $a \neq 0$

$\left(a^x\right)^y = a^{xy}$

$a^x \cdot b^x = (ab)^x$

$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$, где $b \neq 0$

! **При чётном показателе степени**

$a,\ b > 0$

$(-a)^n = b$ $\quad -a^n = -b$

$(-3)^4 = 81$ $\quad -3^4 = -81$

Таблица степеней

a^n	Значения n					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
2^n	2	4	8	16	32	64
3^n	3	9	27	81	243	729
4^n	4	16	64	256	1024	4096
5^n	5	25	125	625	3125	15 625
6^n	6	36	216	1296	7776	46 656
7^n	7	49	343	2401	16 807	
8^n	8	64	512	4096	32 768	
9^n	9	81	729	6561	59 049	

a^n	Значения n			
	7	**8**	**9**	**10**
2^n	128	256	512	1024
3^n	2187	6561	19 683	59 049

! **Если в основании степени отрицательное число**

$a^n > 0$, если n — чётное число (2; 4; 6...):

$(-3)^4 = 81.$

$a^n < 0$, если n — нечётное число (1; 3; 5...):

$(-2)^5 = -32.$

Практические задания

3 Вычислите.

а) $\dfrac{8^2}{2^5}=\dfrac{\left(2^3\right)^2}{2^5}=\dfrac{2^{3\cdot 2}}{2^5}=\dfrac{2^6}{2^5}=2^{6-5}=2^1=2;$

б) $\dfrac{6^{25}\cdot 9^{11}}{27^{15}\cdot 4^{12}}=\dfrac{(2\cdot 3)^{25}\cdot\left(3^2\right)^{11}}{\left(3^3\right)^{15}\cdot\left(2^2\right)^{12}}=\dfrac{2^{25}\cdot 3^{25}\cdot 3^{22}}{3^{45}\cdot 2^{24}}=\dfrac{2^{25}\cdot(3^{25}\cdot 3^{22})}{2^{24}\cdot 3^{45}}=\dfrac{2^{25}\cdot 3^{47}}{2^{24}\cdot 3^{45}}=$

$=2^{25-24}\cdot 3^{47-45}=2^1\cdot 3^2=18.$

Ответ: а) 2; б) 18.

ДРОБИ

Число вида $\dfrac{m}{n}$, где $m\in Z$, $n\in N$, называют **обыкновенной дробью**.

$\dfrac{m}{n}$ $\begin{matrix}\leftarrow \textbf{числитель}\\ \leftarrow \textbf{знаменатель}\end{matrix}$

Любое число, знаменатель дробной части которого выражается единицей с одним или несколькими нулями, можно представить в виде **десятичной дроби**.
Например:

$\dfrac{3}{10}=0{,}3;\quad \dfrac{3}{100}=0{,}03;$

$2\dfrac{3}{1000}=2{,}003;\quad \dfrac{-7}{100}=-0{,}07.$

Основное свойство дроби
Если числитель и знаменатель дроби умножить (разделить) на одно и то же число, отличное от 0, то получится дробь, равная данной.

$\boldsymbol{\dfrac{a}{b}=\dfrac{ac}{bc}}$**, где** $\boldsymbol{c\neq 0}$

Например:

$\dfrac{0{,}35}{0{,}4}=\dfrac{0{,}35\cdot 100}{0{,}4\cdot 100}=\dfrac{35}{40}=\dfrac{7}{8};$

$0{,}3:0{,}27=\dfrac{0{,}3}{0{,}27}=\dfrac{0{,}3\cdot 100}{0{,}27\cdot 100}=\dfrac{30}{27}=$

$=\dfrac{30:3}{27:3}=\dfrac{10}{9}=1\dfrac{1}{9}.$

Действия с обыкновенными дробями

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Выделение целой части из неправильной дроби:

$$\frac{17}{7} = 2\frac{3}{7} \qquad \begin{array}{r|l} -17 & 7 \\ \underline{14} & 2 \\ 3 & \end{array}$$

Перевод обыкновенной дроби в десятичную:

$$\frac{17}{8} = 2{,}125;$$

$$\frac{3}{25} = \frac{3 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{12}{100} = 0{,}12;$$

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{375}{1000} = 0{,}375.$$

$$\begin{array}{r|l} -17 & 8 \\ \underline{16} & 2{,}125 \\ -10 & \\ \underline{8} & \\ -20 & \\ \underline{16} & \\ -40 & \\ \underline{40} & \\ 0 & \end{array}$$

Перевод смешанного числа в неправильную дробь:

$$3\frac{5}{9} = \frac{3 \cdot 9 + 5}{9} = \frac{32}{9}.$$

Чтобы **сложить (вычесть) смешанные числа**, надо:

1) привести дробные части этих чисел к наименьшему общему знаменателю;

2) отдельно выполнить сложение (вычитание) целых частей и отдельно — дробных.

• Если при сложении дробных частей получилась неправильная дробь, выделить целую часть из этой дроби и прибавить её к полученной целой части.

• Если дробная часть уменьшаемого меньше дробной части вычитаемого, превратить её в неправильную дробь, уменьшив на единицу целую часть.

Чтобы выполнить **умножение смешанных чисел**, надо:

1) записать смешанные части в виде неправильных дробей;

2) найти произведение числителей и произведение знаменателей этих дробей;

3) первое произведение записать числителем, а второе — знаменателем.

Чтобы выполнить **деление смешанных чисел**, надо:

1) записать смешанные части в виде неправильных дробей;

2) делимое умножить на число, обратное делителю.

Практические задания

4 Вычислите.

а) $2\frac{7^{\backslash 2}}{9} + 3\frac{5^{\backslash 3}}{6} = 2\frac{14}{18} + 3\frac{15}{18} = 5\frac{29}{18} = 6\frac{11}{18};$

б) $9\frac{7^{\backslash 2}}{15}-2\frac{5^{\backslash 5}}{6}=9\frac{14}{30}-2\frac{25}{30}=8\frac{44}{30}-2\frac{25}{30}=6\frac{19}{30}$;

в) $7-3\frac{2}{11}=6\frac{11}{11}-3\frac{2}{11}=3\frac{9}{11}$; г) $3\frac{5}{6}-2=1\frac{5}{6}$.

Ответ: а) $6\frac{11}{18}$; б) $6\frac{19}{30}$; в) $3\frac{9}{11}$; г) $1\frac{5}{6}$.

5 Вычислите.

а) $2\frac{1}{3}\cdot 4\frac{2}{7}=\frac{7}{3}\cdot\frac{30}{7}=\frac{7\cdot 30}{3\cdot 7}=10$; б) $15\cdot 2\frac{3}{5}=15\cdot 2+15\cdot\frac{3}{5}=30+\frac{15\cdot 3}{5}=30+9=39$.

Ответ: а) 10; б) 39.

6 Вычислите.

а) $2\frac{3}{5}:1\frac{6}{7}=\frac{13}{5}:\frac{13}{7}=\frac{13}{5}\cdot\frac{7}{13}=\frac{7}{5}=1\frac{2}{5}$; б) $\frac{3}{7}:14=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{14}=\frac{3}{98}$;

в) $2:1\frac{3}{5}=2:\frac{8}{5}=\frac{2}{1}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}=1{,}25$; г) $2\frac{8}{9}:\frac{13}{27}=\frac{26}{9}:\frac{13}{27}=\frac{26}{9}\cdot\frac{27}{13}=\frac{26\cdot 27}{9\cdot 13}=6$.

Ответ: а) $1\frac{2}{5}$; б) $\frac{3}{98}$; в) 1,25; г) 6.

7 Вычислите.

а) $\dfrac{2\frac{1}{4}}{3\frac{3}{5}}=\dfrac{2\frac{1}{4}\cdot 20}{3\frac{3}{5}\cdot 20}=\dfrac{2\cdot 20+\frac{1}{4}\cdot 20}{3\cdot 20+\frac{3}{5}\cdot 20}=\dfrac{40+5}{60+12}=\dfrac{45}{72}=\dfrac{5}{8}=0{,}625$;

б) $\dfrac{10}{1\frac{13}{15}}=\dfrac{10\cdot 15}{1\frac{13}{15}\cdot 15}=\dfrac{150}{1\cdot 15+\frac{13}{15}\cdot 15}=\dfrac{150}{15+13}=\dfrac{150}{28}=\dfrac{75}{14}=5\dfrac{5}{14}$.

Ответ: а) 0,625; б) $5\frac{5}{14}$.

Действия с десятичными дробями

Чтобы **сложить (вычесть) десятичные дроби**, надо:
1) уравнять в этих дробях количество знаков после запятой;
2) записать их друг под другом так, чтобы запятая была записана под запятой;
3) выполнить сложение (вычитание), не обращая внимания на запятую;
4) поставить в ответе запятую под запятой.

Чтобы **перемножить две десятичные дроби**, надо:
1) выполнить умножение, не обращая внимания на запятые;
2) отделить запятой столько цифр справа, сколько их стоит после запятой в обоих множителях вместе.

Чтобы **разделить десятичную дробь на натуральное число**, надо:
1) разделить дробь на это число, не обращая внимания на запятую;
2) поставить в частном запятую, когда кончится деление целой части.

Чтобы **разделить число на десятичную дробь**, надо:
1) в делимом и делителе перенести запятую вправо на столько цифр, сколько их после запятой в делителе;
2) выполнить деление на натуральное число.

Практические задания

8 Вычислите.

а) $2{,}35+11{,}7=14{,}05$;

$$\begin{array}{r} 11{,}70 \\ +\ \ 2{,}35 \\ \hline 14{,}05 \end{array}$$

б) $12-10{,}346=1{,}654$;

$$\begin{array}{r} 12{,}000 \\ -\ 10{,}346 \\ \hline 1{,}654 \end{array}$$

в) $16{,}77+12{,}23=29{,}00=29.$

$$\begin{array}{r} 16{,}77 \\ +\ 12{,}23 \\ \hline 29{,}00 \end{array}$$

Ответ: а) 14,05; б) 1,654; в) 29.

9 Вычислите.

$3{,}25\cdot 2{,}8=9{,}100=9{,}1.$

$$\begin{array}{r} 3{,}25 \\ \times\ \ 2{,}8 \\ \hline 2600 \\ +\ 650\ \ \\ \hline 9{,}100 \end{array}$$

Ответ: 9,1.

10 Вычислите.

а) $183{,}24:9=20{,}36$;

$$\begin{array}{r|l} 183{,}24 & 9 \\ \cline{2-2} -18 & 20{,}36 \\ \cline{1-1} 32 & \\ -27 & \\ \cline{1-1} 54 & \\ -54 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

б) $70{,}15:23=3{,}05;$

в) $36:25=1{,}44.$

б)
$$\begin{array}{r|l} 70{,}15 & 23 \\ \underline{-69} & 3{,}05 \\ 115 & \\ \underline{-115} & \\ 0 & \end{array}$$

в)
$$\begin{array}{r|l} 36 & 25 \\ \underline{-25} & 1{,}44 \\ 110 & \\ \underline{-100} & \\ 100 & \\ \underline{-100} & \\ 0 & \end{array}$$

Ответ: а) 20,36; б) 3,05; в) 1,44.

11 Вычислите.

а) $25{,}6:0{,}08=2560:8=320;$

б) $12{,}35:2{,}5=123{,}5:25=4{,}94;$

в) $36:0{,}125=36\,000:125=288;$

г) $0{,}8:0{,}25=\dfrac{0{,}8}{0{,}25}=\dfrac{0{,}8\cdot100}{0{,}25\cdot100}=3\dfrac{1}{5}=3{,}2.$

Ответ: а) 320; б) 4,94; в) 288; г) 3,2.

ПРОЦЕНТЫ

Процентом (лат. *per cent* — на сотню) называется одна сотая часть величины.

$$\mathbf{1\%=\frac{1}{100}} \qquad \mathbf{100\%=1} \qquad \mathbf{3\%=0{,}03\ (3:100)} \qquad \mathbf{0{,}2=20\%\ (0{,}2\cdot100)}$$

Практические задания

12 Шуба во время распродажи стоит 77 000 рублей. Скидка составляет 30%. Какова была стоимость шубы до распродажи?

Решение:

77 000 руб.	100% – 30% = 70%
x руб.	100%

$\dfrac{77\,000}{x}=\dfrac{70}{100};\quad x=\dfrac{77\,000\cdot100}{70}=110\,000$ (руб.) — цена шубы до распродажи.

Ответ: 110 000.

13 Магазин закупает чашки по оптовой цене 120 рублей за штуку и продаёт с наценкой 30%. Какое наибольшее число таких чашек можно купить в этом магазине на 900 рублей?

Решение:

120 руб.	100%
x руб.	100% + 30% = 130%

1) $\frac{120}{x}=\frac{100}{130}$; $x=\frac{120\cdot 130}{100}=156$ (руб.) — цена одной чашки с наценкой;

2) $900:156=5,\ldots \Rightarrow 5$ чашек можно купить.

Ответ: 5.

14 Первый сплав содержит 20% меди, второй — 10% меди. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 14% меди. Найдите массу первого сплава.

Решение:

Сплав	Масса сплава	Масса меди
1	x	$0,2x$
2	$200 - x$	$0,1(200 - x)$
полученный	200	$0,2x + 0,1(200 - x)$ $200 \cdot 0,14 = 28$

20% = 0,2; 10% = 0,1;
14% = 0,14;

$0,2x+0,1(200-x)=28;$

$0,2x+(20-0,1x)=28;$

$0,1x=8;$

$x = 80$ (кг) — масса первого сплава.

Ответ: 80.

15 Билет на поезд до Москвы стоил 2500 рублей, после подорожания стоимость билета составила 3000 рублей. На сколько процентов повысилась цена билета?

Решение:

2500 руб.	100%
3000 руб.	x%

1) $\frac{2500}{3000}=\frac{100}{x}$; $x=\frac{3000\cdot100}{2500}=120\%$;

2) $120\%-100\%=20\%$ — повышение цены.

Ответ: 20%.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Целые и дробные числа (положительные и отрицательные) образуют множество **рациональных чисел**. Множество рациональных (от лат. *ratio* — деление) чисел обозначается Q.

Любое рациональное число можно представить в виде обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$, где $m\in Z$, $n\in N$. Получается, что числитель (m) может иметь знак, а знаменатель (n) должен быть положительным числом.

Например:

а) $5=\frac{5}{1}$; б) $1{,}5=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$.

Любое рациональное число можно записать в виде десятичной дроби либо в виде периодической дроби.

Например:

а) $3=3{,}0$;

б) $\frac{3}{11}=0{,}(27)$.

$$\begin{array}{r|l} 3 & 11 \\ \underline{0} & 0{,}2727\ldots \\ 30 & \\ \underline{22} & \\ 80 & \\ \underline{77} & \\ 30 & \\ \underline{22} & \\ 80 & \\ \underline{77} & \\ 3 & \end{array}$$

Действия с отрицательными и положительными числами

Чтобы **сложить два отрицательных числа**, надо:

1) сложить их модули;

2) поставить перед полученным числом знак «–».

$$-(-a)=a$$

Например:

$-2+(-7)=-(2+7)=-9.$

Чтобы **сложить два числа с разными знаками**, надо:
1) из большего модуля слагаемых вычесть меньший;
2) поставить перед полученным числом знак того слагаемого, модуль которого больше.
Например:

а) $-5+15=+(15-5)=10;$

б) $-17+11=-(17-11)=-6.$

Чтобы из данного числа вычесть другое, надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.

Например:

а) $-2-(-5)=-2+5=3;$

б) $8-9=8+(-9)=-1.$

Чтобы **перемножить (разделить) два числа с разными знаками**, надо перемножить (разделить) модули этих чисел и поставить перед полученным числом знак «–».
Например:

а) $10\cdot(-3{,}5)=-35;$

б) $-0{,}25\cdot 4=-1;$

в) $-7:2=-3{,}5.$

Чтобы **перемножить (разделить) два отрицательных числа**, надо перемножить (разделить) их модули.
Например:

а) $-7\cdot(-10)=+70=70;$

б) $-42:(-7)=+6=6.$

СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n},\ a\neq 0 \qquad a^0=1,\ a\neq 0 \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n},\ a\neq 0,\ b\neq 0$$

Практические задания

16 Вычислите.

а) $5^{-2}=\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25};$

б) $(-4)^{-3}=\frac{1}{(-4)^3}=-\frac{1}{64};$

в) $(-2)^{-4}=\dfrac{1}{(-2)^4}=\dfrac{1}{16}$; г) $-3^{-6}=-\dfrac{1}{3^6}=-\dfrac{1}{729}$;

д) $\dfrac{9^{-2}\cdot 36}{16^{-2}\cdot 27}=\dfrac{\left(3^2\right)^{-2}\cdot\left(3^2\cdot 2^2\right)}{\left(2^4\right)^{-2}\cdot 3^3}=\dfrac{3^{-4}\cdot 3^2\cdot 2^2}{2^{-8}\cdot 3^3}=\dfrac{3^{-2}\cdot 2^2}{3^3\cdot 2^{-8}}=\dfrac{2^8\cdot 2^2}{3^3\cdot 3^2}=\dfrac{2^{10}}{3^5}=\dfrac{1024}{243}$.

Ответ: а) $\dfrac{1}{25}$; б) $-\dfrac{1}{64}$; в) $\dfrac{1}{16}$; г) $-\dfrac{1}{729}$; д) $\dfrac{1024}{243}$.

КОРЕНЬ СТЕПЕНИ $n>1$ И ЕГО СВОЙСТВА

Корнем *n*-й степени $(n\in N,\ n>1)$ из действительного числа a называется такое действительное число b, n-я степень которого равна a.

!

$\sqrt[m]{a}$ не существует, если $a<0$ и m — чётное число.

Если n — чётное число, то $\sqrt[n]{x^n}=|x|$.

Свойства корней *n*-й степени

Для любых $a\geq 0$, $b\geq 0$, $n\geq 2$, $m\geq 2$:

$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, $b\neq 0$

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}$

$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$

$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}$

Практические задания

17 Вычислите.

а) $\sqrt{625}=25$, т. к. $25^2=625$; б) $\sqrt[3]{64}=4$, т. к. $4^3=64$;

в) $\sqrt[3]{0{,}000\,027}=0{,}03$, т. к. $(0{,}03)^3=0{,}000\,027$.

Ответ: а) 25; б) 4; в) 0,03.

18 Вычислите.

а) $\sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)^2}=|3-\sqrt{2}|=3-\sqrt{2},$ т. к. $3>\sqrt{2};$

б) $\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}=|\sqrt{3}-\sqrt{5}|=\sqrt{5}-\sqrt{3},$ т. к. $\sqrt{5}>\sqrt{3};$

в) $\sqrt[3]{\left(3-\sqrt{2}\right)^3}=3-\sqrt{2};$

г) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{4+3-4\sqrt{3}}=\sqrt{2^2-2\cdot 2\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=|2-\sqrt{3}|=$

$=2-\sqrt{3},$ т. к. $2>\sqrt{3}.$

Ответ: а) $3-\sqrt{2}$; б) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$; в) $3-\sqrt{2}$; г) $2-\sqrt{3}$.

19 Вычислите.

а) $\sqrt{7\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{66}=\sqrt{\frac{22}{3}\cdot 66}=\sqrt{22\cdot 22}=22;$

б) $\sqrt{34^2-16^2}=\sqrt{(34-16)(34+16)}=\sqrt{18\cdot 50}=\sqrt{9\cdot 2\cdot 2\cdot 25}=3\cdot 2\cdot 5=30.$

Ответ: а) 22; б) 30.

СТЕПЕНЬ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ И ЕЁ СВОЙСТВА

Пусть $a>0$, $\frac{m}{n}$ — рациональное число $(n\geq 2,\ m\in Z,\ n\in N)$, тогда $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Например:

а) $7^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{7^2}=\sqrt[3]{49};$

б) $3^{\frac{-4}{5}}=\sqrt[5]{3^{-4}}=\sqrt[5]{\frac{1}{3^4}}=\sqrt[5]{\frac{1}{81}}.$

Все свойства степени с целым показателем верны для степени с любым рациональным показателем и положительным основанием.

$a > 1$, r — рациональное число

Если $r > 0$, то $a^r > 1$

Если $r < 0$, то $0 < a^r < 1$

$0 < a > 1$, r, t — рациональные числа

Если $r > t$, то $a^r < a^t$

$a > 1$, r, t — рациональные числа

Если $r > t$, то $a^r > a^t$

Например:

а) $3^{\frac{1}{4}} > 3^{\frac{1}{5}}$, т. к. $3 > 1$ и $\frac{1}{4} > \frac{1}{5}$;

б) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{8}} > \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$, т. к. $0 < \frac{2}{5} < 1$ и $\frac{3}{8} < \frac{1}{2}$;

в) $(3{,}7)^{-2{,}5} < 1$, т. к. $3{,}7 > 1$, $-2{,}5 < 0$.

Практические задания

20 Вычислите.

$$81^{\frac{1}{7}} \cdot 27^{\frac{1}{7}} = (81 \cdot 27)^{\frac{1}{7}} = \left(3^4 \cdot 3^3\right)^{\frac{1}{7}} = \left(3^7\right)^{\frac{1}{7}} = 3^1 = 3.$$

Ответ: 3.

СВОЙСТВА СТЕПЕНИ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

При любом $x \in R$ и любом $a > 0$ степень a^x является положительным действительным числом: $a^x > 0$ при $x \in R$, $a > 0$.

Все свойства степени с рациональным показателем верны для степени с действительным показателем.

Практические задания

21 Вычислите.

а) $\left(9^{\sqrt{26}-5}\right)^{\sqrt{26}+5} = 9^{(\sqrt{26}-5)(\sqrt{26}+5)} = 9^{\left(\sqrt{26}\right)^2-5^2} = 9^{26-25} = 9;$

б) $7^{5\sqrt{5}-1}\cdot 7^{1-3\sqrt{5}}:7^{2\sqrt{5}-1}=7^{(5\sqrt{5}-1)+(1-3\sqrt{5})-(2\sqrt{5}-1)}=7^{5\sqrt{5}-1+1-3\sqrt{5}-2\sqrt{5}+1}=7^1=7;$

в) $\dfrac{5^{\sqrt{7}}\cdot 6^{\sqrt{7}}}{30^{\sqrt{7}-2}}=\dfrac{(5\cdot 6)^{\sqrt{7}}}{30^{\sqrt{7}-2}}=\dfrac{30^{\sqrt{7}}}{30^{\sqrt{7}-2}}=30^{\sqrt{7}-(\sqrt{7}-2)}=30^{\sqrt{7}-\sqrt{7}+2}=30^2=900.$

Ответ: а) 9; б) 7; в) 900.

22 Вычислите.

а) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{4}}}=\dfrac{3^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{4}}}=\dfrac{\left(3^{\frac{1}{4}}\right)^2-\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^2}{3^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{4}}}=\dfrac{\left(3^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(3^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{4}}\right)}{3^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{4}}}=3^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{4}}=$

$=\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2};$

б) $\dfrac{2^{-\sqrt{7}}}{0{,}5^{\sqrt{7}+1}}=\dfrac{2^{-\sqrt{7}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{7}+1}}=\dfrac{2^{-\sqrt{7}}}{\left(2^{-1}\right)^{\sqrt{7}+1}}=\dfrac{2^{-\sqrt{7}}}{2^{-\sqrt{7}-1}}=2^{-\sqrt{7}-\left(-\sqrt{7}-1\right)}=2^{-\sqrt{7}+\sqrt{7}+1}=2^1=2;$

в) $\dfrac{2^{2\sqrt{3}}}{0{,}25^{2-\sqrt{3}}}=\dfrac{2^{2\sqrt{3}}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{2-\sqrt{3}}}=\dfrac{2^{2\sqrt{3}}}{\left(2^{-2}\right)^{2-\sqrt{3}}}=\dfrac{2^{2\sqrt{3}}}{2^{-2\left(2-\sqrt{3}\right)}}=\dfrac{2^{2\sqrt{3}}}{2^{-4+2\sqrt{3}}}=2^{2\sqrt{3}-\left(-4+2\sqrt{3}\right)}=$

$=2^{2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}}=2^4=16;$

г) $\dfrac{\sqrt{6}}{9^{\frac{1}{5}}\cdot 4^{\frac{1}{4}}}=\dfrac{(2\cdot 3)^{\frac{1}{2}}}{\left(3^2\right)^{\frac{1}{5}}\cdot\left(2^2\right)^{\frac{1}{4}}}=\dfrac{2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{2}{5}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}}=3^{\frac{1}{2}-\frac{2}{5}}=3^{\frac{5}{10}-\frac{4}{10}}=3^{\frac{1}{10}}=\sqrt[10]{3};$

д) $9^{\sqrt{5}}\cdot(0{,}25)^{-\sqrt{5}}:6^{2\sqrt{5}}=9^{\sqrt{5}}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\sqrt{5}}:6^{2\sqrt{5}}=9^{\sqrt{5}}\cdot 4^{\sqrt{5}}:\left(6^2\right)^{\sqrt{5}}=$

$=(9\cdot 4)^{\sqrt{5}}:36^{\sqrt{5}}=36^{\sqrt{5}}:36^{\sqrt{5}}=1.$

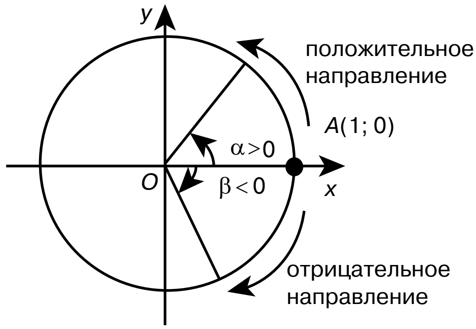
Ответ: а) $\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}$; б) 2; в) 16; г) $\sqrt[10]{3}$; д) 1.

ОСНОВЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

Раздел посвящён тригонометрическим функциям, радианной и градусной мере угла. Рассматриваются основные тригонометрические формулы и их применение при упрощении выражений.

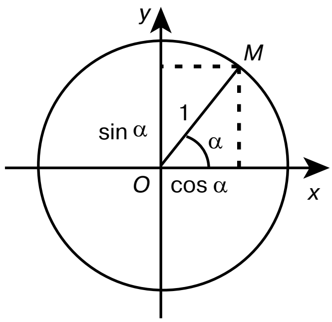
СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС, КОТАНГЕНС ПРОИЗВОЛЬНОГО УГЛА

Единичной окружностью в тригонометрии называют окружность радиуса 1 с центром в начале системы координат *xOy*.



Синусом угла α (sin α) называется ордината точки, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол α.

Косинусом угла α (cos α) называется абсцисса точки, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол α.

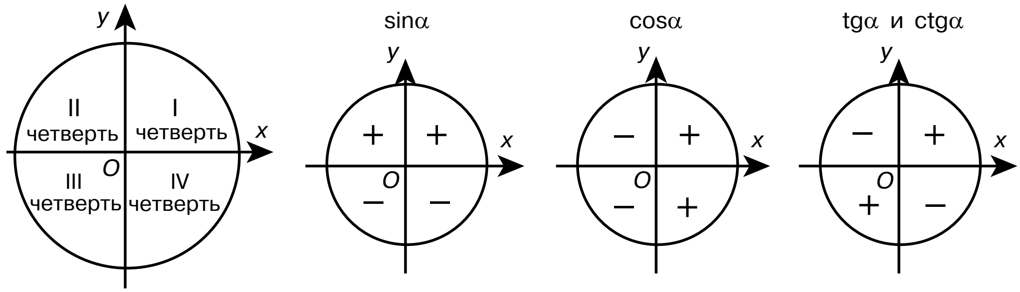


Тангенсом угла α (tg α) называется отношение синуса угла к его косинусу.

Котангенсом угла α (ctg α) называется отношение косинуса угла к его синусу.

$$\sin\alpha = y \qquad \cos\alpha = x \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса



Практические задания

23 Определите знаки синуса, косинуса и тангенса.

а) $\alpha = 240°$;

$\alpha = 240°$ — III четверть $\Rightarrow \sin\alpha < 0$,

$\cos\alpha < 0,\ \operatorname{tg}\alpha > 0$;

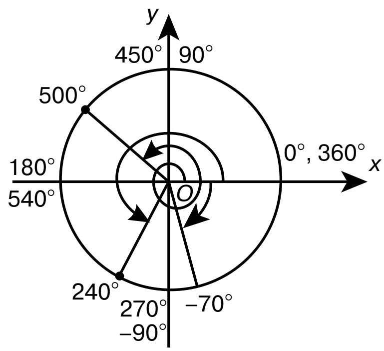
б) $\beta = 500°$;

$\beta = 500°$ — II четверть $\Rightarrow \sin\beta > 0$,

$\cos\beta < 0,\ \operatorname{tg}\beta < 0$;

в) $\gamma = -70°$;

$\gamma = -70°$ — IV четверть $\Rightarrow \sin\gamma < 0,\ \cos\gamma > 0,\ \operatorname{tg}\gamma < 0$.



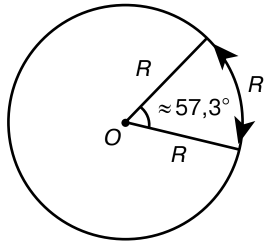
Ответ: а) $\sin\alpha < 0,\ \cos\alpha < 0,\ \operatorname{tg}\alpha > 0$; б) $\sin\beta > 0,\ \cos\beta < 0,\ \operatorname{tg}\beta < 0$; в) $\sin\gamma < 0,\ \cos\gamma > 0,\ \operatorname{tg}\gamma < 0$.

РАДИАННАЯ МЕРА УГЛА

Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется **углом в один радиан**.

$$1\ \textbf{рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \qquad 1^{\circ} = \frac{\pi}{180}\ \textbf{рад}$$

$$\alpha\ \textbf{рад} = \left(\frac{180}{\pi}\cdot\alpha\right)^{\circ} \qquad \alpha^{\circ} = \frac{\pi}{180}\cdot\alpha\ \textbf{рад}$$

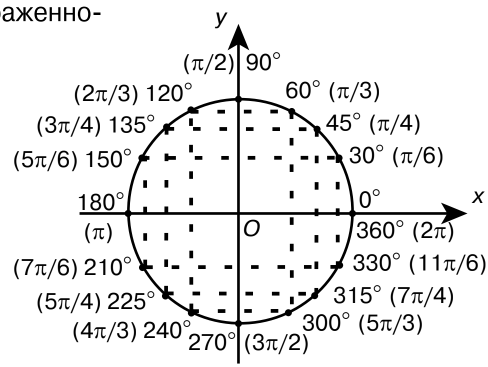


Градусы	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Практические задания

24 Переведите градусную (радианную) меру угла в радианную (градусную).

Найдите радианную меру угла, выраженного в градусах.



а) $80^{\circ} = \frac{\pi}{180}\cdot 80 = \frac{4\pi}{9}$;

б) $290^{\circ} = \frac{\pi}{180}\cdot 290 = \frac{29\pi}{18}$;

в) $110^{\circ} = \frac{\pi}{180}110 = \frac{11\pi}{18}$.

Ответ: а) $\frac{4\pi}{9}$; б) $\frac{29\pi}{18}$; в) $\frac{11\pi}{18}$.

Найдите градусную меру угла, выраженного в радианах.

а) $\frac{\pi}{5} = \left(\frac{180}{\pi}\cdot\frac{\pi}{5}\right)^{\circ} = 36^{\circ}$;

б) $3 = \left(\frac{180}{\pi}\cdot 3\right)^{\circ} = \left(\frac{540}{\pi}\right)^{\circ}$;

в) $\frac{3\pi}{5} = \left(\frac{180}{\pi}\cdot\frac{3\pi}{5}\right)^{\circ} = 108^{\circ}$;

г) $\frac{5\pi}{6} = \left(\frac{180}{\pi}\cdot\frac{5\pi}{6}\right)^{\circ} = 150^{\circ}$.

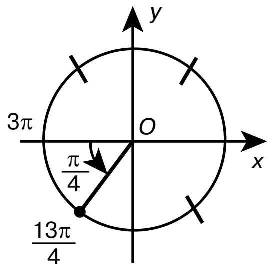
Ответ: а) 36°; б) $\left(\frac{540}{\pi}\right)^{\circ}$; в) 108°; г) 150°.

25 На единичной окружности постройте точку, полученную поворотом точки (1; 0) на заданный угол.

а) $\frac{13\pi}{4}$;

$\frac{13\pi}{4} = 3\pi + \frac{\pi}{4}$;

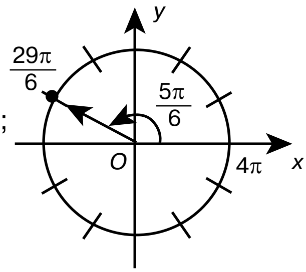
$-\begin{array}{r|l} 13 & 4 \\ \underline{12} & 3 \\ 1 & \end{array}$



б) $\frac{29\pi}{6}$;

$\frac{29\pi}{6} = 4\pi + \frac{5\pi}{6}$;

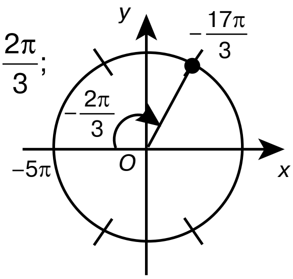
$-\begin{array}{r|l} 29 & 6 \\ \underline{24} & 4 \\ 5 & \end{array}$



в) $-\frac{17\pi}{3}$;

$-\frac{17\pi}{3} = -5\pi - \frac{2\pi}{3}$;

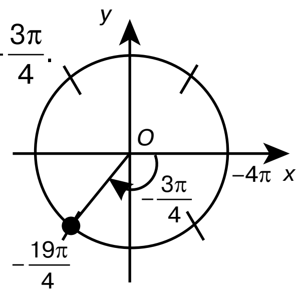
$-\begin{array}{r|l} 17 & 3 \\ \underline{15} & 5 \\ 2 & \end{array}$



г) $-\frac{19\pi}{4}$;

$-\frac{19\pi}{4} = -4\pi - \frac{3\pi}{4}$.

$-\begin{array}{r|l} 19 & 4 \\ \underline{16} & 4 \\ 3 & \end{array}$



СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС, КОТАНГЕНС ЧИСЛА

Синусом числа *t* называют ординату точки единичной окружности, соответствующей числу t ($\sin t = y$).

Косинусом числа *t* называют абсциссу точки единичной окружности, соответствующей числу t ($\cos t = x$).

$\sin(-t) = -\sin t$	$\mathrm{tg}(-t) = -\mathrm{tg}\, t$	$\cos(-t) = \cos t$	$\mathrm{ctg}(-t) = -\mathrm{ctg}\, t$

Тангенсом числа *t* называют отношение синуса числа t к косинусу $\left(\operatorname{tg} t = \dfrac{\sin t}{\cos t}\right)$.

Котангенсом числа *t* называют отношение косинуса числа t к синусу $\left(\operatorname{ctg} t = \dfrac{\cos t}{\sin t}\right)$.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
$\operatorname{tg} t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\operatorname{ctg} t$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

!

$$\sin x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$$

Знак перед корнем определяется знаком выражения, стоящего в левой части формулы.

Практические задания

26 Упростите выражения.

а) $2 - \sin^2 x - \cos^2 x = 2 - \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = 2 - 1 = 1;$

б) $\operatorname{tg}(-x)\cdot\operatorname{ctg}x-\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=-1-\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^2=-(1+\operatorname{tg}^2 x)=-\dfrac{1}{\cos^2 x}$;

в) $\operatorname{ctg}^2 x(1-\cos x)(1+\cos x)=\operatorname{ctg}^2 x(1^2-\cos^2 x)=\operatorname{ctg}^2 x(1-\cos^2 x)=$

$=\operatorname{ctg}^2 x(\cos^2 x+\sin^2 x-\cos^2 x)=\operatorname{ctg}^2 x\sin^2 x=\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot\sin^2 x=\cos^2 x$;

г) $\dfrac{\sin^2\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\sin^2\alpha-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)-\cos^2\alpha}-1=$

$=\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\cos^2\alpha}-1=\dfrac{-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}-1=-\operatorname{ctg}^2\alpha-1=-(\operatorname{ctg}^2\alpha+1)=-\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

Ответ: а) 1; б) $-\dfrac{1}{\cos^2 t}$; в) $\cos^2 x$; г) $-\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

27 Вычислите $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha=0{,}6$ и $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

Решение:

1) $\sin x=\pm\sqrt{1-\cos^2 x}=\pm\sqrt{1-(0{,}6)^2}=\pm\sqrt{1-0{,}36}=\pm\sqrt{0{,}64}=\pm0{,}8$;

2) α принадлежит IV четверти $\Rightarrow\sin\alpha=-0{,}8$;

3) $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{-0{,}8}{0{,}6}=-\dfrac{8}{6}=-\dfrac{4}{3}\Rightarrow\operatorname{ctg}\alpha=-\dfrac{3}{4}$.

Ответ: $\sin\alpha=-0{,}8$; $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{4}{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha=-\dfrac{3}{4}$.

28 Вычислите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=-3$ и $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Решение:

1) $\operatorname{tg}\alpha=-3\Rightarrow\operatorname{ctg}\alpha=-\dfrac{1}{3}$;

2) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=1+\operatorname{tg}^2\alpha,\ \dfrac{1}{\cos^2\alpha}=1+(-3)^2,\ \dfrac{1}{\cos^2\alpha}=1+9,\ \dfrac{1}{\cos^2\alpha}=10,$

$\cos^2\alpha=\dfrac{1}{10},\ \cos x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{10}}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}$;

3) α принадлежит II четверти $\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$;

4) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, -3 = \frac{\sin\alpha}{-\frac{1}{\sqrt{10}}}$, $\sin\alpha = (-3)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

Ответ: $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$; $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$; $\mathrm{ctg}\,\alpha = -\frac{1}{3}$.

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

Если в качестве аргумента тригонометрической функции выступает выражение вида $\frac{\pi n}{2} \pm t$, где $n \in Z$, то такое тригонометрическое выражение можно привести к более простому виду, используя формулы приведения.

Для того чтобы **записать любую формулу приведения**, необходимо руководствоваться следующими правилами.

1) В правой части формулы ставится тот знак, который имеет левая часть, в зависимости от четверти, в которой расположен заданный угол, при условии, что t — острый угол.

2) Если под знаком преобразуемой тригонометрической функции содержится аргумент вида $\pi \pm t$ или $2\pi \pm t$, то наименование тригонометрической функции следует сохранить.

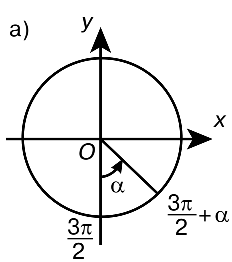
3) Если под знаком преобразуемой тригонометрической функции содержится аргумент вида $\frac{\pi}{2} \pm t$ или $\frac{3\pi}{2} \pm t$, то наименование тригонометрической функции следует изменить (синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс, котангенс на тангенс).

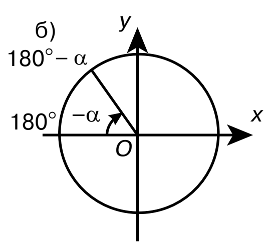
Например:

а) $\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\cos\alpha$, поскольку:

1) $\frac{3\pi}{2} + \alpha$ принадлежит IV четверти $\Rightarrow$ ставится знак «–», т. к. синус в IV четверти отрицателен;

2) $\frac{3\pi}{2} + \alpha \Rightarrow \sin$ меняется на cos.





б) $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, поскольку:

1) $180° - \alpha$ принадлежит II четверти $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ ставится знак «–», т. к. косинус в II четверти отрицателен;

2) $180° - \alpha$ $\Rightarrow$ наименование тригонометрической функции сохраняется.

Практические задания

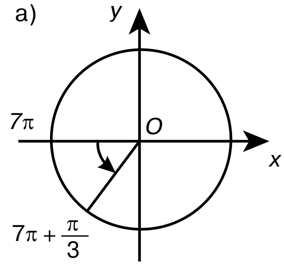
29 Вычислите.

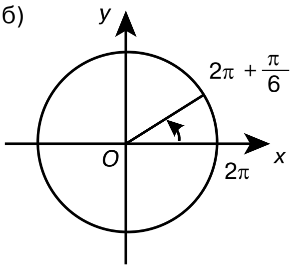
а) $\sin\left(\dfrac{22\pi}{3}\right) = \sin\left(7\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

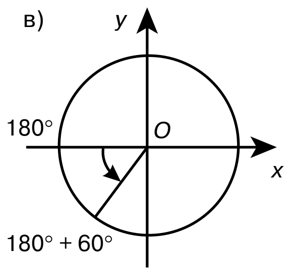
б) $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{13\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg}\dfrac{13\pi}{6} = -\operatorname{tg}\left(2\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

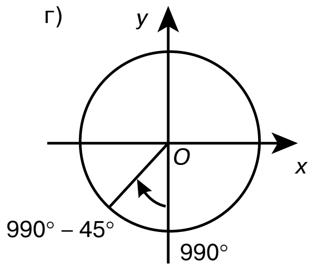
в) $\cos 240° = \cos(180° + 60°) = -\cos 60° = -\dfrac{1}{2} = -0{,}5$;

г) $\operatorname{ctg} 945° = \operatorname{ctg}(990° - 45°) = \operatorname{tg} 45° = 1$.

а)


б)


в)


г)


Ответ: а) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; б) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; в) –0,5; г) 1.

СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС И КОТАНГЕНС СУММЫ И РАЗНОСТИ ДВУХ УГЛОВ

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x}$$

Практические задания

30 Вычислите.

а) $\sin 65^\circ \cos 25^\circ + \cos 65^\circ \sin 25^\circ = \sin(65^\circ + 25^\circ) = \sin 90^\circ = 1;$

б) $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4};$

в) $\cos 85^\circ \cos 25^\circ + \sin 85^\circ \cos 65^\circ = \cos 85^\circ \cos 25^\circ + \sin 85^\circ \cos(90^\circ - 25^\circ) =$

$= \cos 85^\circ \cos 25^\circ + \sin 85^\circ \sin 25^\circ = \cos(85^\circ - 25^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} = 0{,}5;$

г) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{7\pi}{16} - \operatorname{tg}\frac{3\pi}{16}}{1 + \operatorname{tg}\frac{7\pi}{16}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{16}} = \operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{16} - \frac{3\pi}{16}\right) = \operatorname{tg}\frac{4\pi}{16} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1;$

д) $\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ - 30^\circ) = \dfrac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 30^\circ} = \dfrac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot 3}{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot 3} = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} =$

$= \dfrac{(3 - \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} = \dfrac{(3)^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2}{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \dfrac{9 - 6\sqrt{3} + 3}{9 - 3} = \dfrac{12 - 6\sqrt{3}}{6} = 2 - \sqrt{3};$

е) $\operatorname{ctg} 75^\circ = \operatorname{ctg}(30^\circ + 45^\circ) = \dfrac{\operatorname{ctg} 30^\circ \operatorname{ctg} 45^\circ - 1}{\operatorname{ctg} 30^\circ + \operatorname{ctg} 45^\circ} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot 1 - 1}{\sqrt{3} + 1} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} =$

$= \dfrac{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \dfrac{(\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 + 1^2}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \dfrac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} = \dfrac{4 - 2\sqrt{3}}{2} =$

$= \dfrac{2(2 - \sqrt{3})}{2} = 2 - \sqrt{3}.$

Ответ: а) 1; б) $\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$; в) 0,5; г) 1; д) $2 - \sqrt{3}$; е) $2 - \sqrt{3}$.

СИНУС И КОСИНУС ДВОЙНОГО УГЛА

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$1-\cos 2x = 2\sin^2 x \qquad 1+\cos 2x = 2\cos^2 x$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha}$$

Практические задания

31 Вычислите.

а) $6\sin 15^\circ\cos 15^\circ = 3\cdot(2\sin 15^\circ\cos 15^\circ) = 3\cdot\sin(2\cdot 15^\circ) = 3\sin 30^\circ = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5;$

б) $(\sin 15^\circ - \cos 15^\circ)^2 = \sin^2 15^\circ - 2\sin 15^\circ\cos 15^\circ + \cos^2 15^\circ = (\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ) -$

$-2\sin 15^\circ\cos 15^\circ = 1-\sin(2\cdot 15^\circ) = 1-\sin 30^\circ = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5;$

в) $\frac{6\,\mathrm{tg}\,15^\circ}{1-\mathrm{tg}^2\,15^\circ} = 3\cdot\frac{2\,\mathrm{tg}\,15^\circ}{1-\mathrm{tg}^2\,15^\circ} = 3\cdot\mathrm{tg}(2\cdot 15^\circ) = 3\cdot\mathrm{tg}\,30^\circ = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3};$

г) $\sin^2 15^\circ - \cos^2 15^\circ = -(\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) = -\cos(2\cdot 15^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2};$

д) $\frac{34\sin 105^\circ\cos 105^\circ}{\sin 210^\circ} = \frac{34\sin 105^\circ\cos 105^\circ}{\sin(2\cdot 105^\circ)} = \frac{34\sin 105^\circ\cos 105^\circ}{2\sin 105^\circ\cos 105^\circ} = \frac{34}{2} = 17.$

Ответ: а) 1,5; б) 0,5; в) $\sqrt{3}$; г) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) 17.

32 Упростите выражения.

а) $\frac{1+\cos 2t}{\sin 2t} = \frac{2\cos^2 t}{2\sin t\cos t} = \frac{\cos t}{\sin t} = \mathrm{ctg}\,t;$

б) $\cos^4 t - \sin^4 t = (\cos^2 t)^2 - (\sin^2 t)^2 = (\cos^2 t - \sin^2 t)(\cos^2 t + \sin^2 t) =$

$= \cos 2t\cdot 1 = \cos 2t;$

в) $1-2\cos^2 t = 1-(1+\cos 2t) = 1-1-\cos 2t = -\cos 2t$;

г) $2\cos 35^\circ \cos 55^\circ = 2\cos(90^\circ - 55^\circ)\cos 55^\circ = 2\sin 55^\circ \cos 55^\circ =$

$= \sin(2\cdot 55^\circ) = \sin 110^\circ = \sin(90^\circ + 20^\circ) = \cos 20^\circ$.

Ответ: а) $\operatorname{ctg} t$; б) $\cos 2t$; в) $-\cos 2t$; г) $\cos 20^\circ$.

ЛОГАРИФМЫ

Раздел содержит основные сведения о логарифмической функции, её свойствах и об их использовании при упрощении логарифмических выражений.

ЛОГАРИФМ ЧИСЛА

Логарифмом положительного числа *b* по основанию *a* ($a>0$, $a\neq 1$) называют число c, такое, что $b=a^c$.

$$\boxed{c=\log_a b}$$

Например:

а) $\log_3 9 = 2$, т. к. $3^2 = 9$;

б) $\log_2 64 = 6$, т. к. $2^6 = 64$;

в) $\log_3 1 = 0$, т. к. $3^0 = 1$;

г) $\log_5 \frac{1}{125} = -3$, т. к. $5^{-3} = \frac{1}{125}$;

д) $\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$, т. к. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 2^4 = 16$;

е) $\log_{0,2} 25 = -2$, т. к. $0{,}2^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} =$

$= 25$.

$\log_a a = 1$	$\log_a 1 = 0$
$\log_a a^c = c$	$a^{\log_a b} = b$

Практические задания

33 Вычислите.

а) $3^{\log_3 5} = 5$;

б) $81^{\log_3 5} = \left(3^4\right)^{\log_3 5} = \left(3^{\log_3 5}\right)^4 = 5^4 = 625$;

в) $7^{\frac{1}{2}\log_7 16} = \left(7^{\log_7 16}\right)^{\frac{1}{2}} = (16)^{\frac{1}{2}} = \left(4^2\right)^{\frac{1}{2}} = 4$;

г) $\log_3 \log_5 125 = \log_3 3 = 1$, т. к. $\log_5 125 = 3$;

д) $7^{\log_7 3+1} = 7^{\log_7 3} \cdot 7^1 = 3 \cdot 7 = 21$.

Ответ: а) 5; б) 625; в) 4; г) 3; д) 21.

34 При каких значениях x выражение $\log_5(4x-1)$ имеет смысл?

Решение:

$4x - 1 > 0$, $4x > 1$, $x > \frac{1}{4}$.

Ответ: $x > \frac{1}{4}$.

ЛОГАРИФМ ПРОИЗВЕДЕНИЯ, ЧАСТНОГО, СТЕПЕНИ

Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, r — любое действительное число.

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c \qquad \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b^r = r\log_a b \qquad \log_{a^r} b = \frac{1}{r}\log_a b$$

Практические задания

35 Вычислите.

а) $\log_4 3\frac{1}{2}+\log_4 4\frac{4}{7}=\log_4\left(3\frac{1}{2}\cdot 4\frac{4}{7}\right)=\log_4\left(\frac{7}{2}\cdot\frac{32}{7}\right)=\log_4 16=2;$

б) $\log_{12}\sqrt[4]{144}=\log_{12}(144)^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}\log_{12}144=\frac{1}{4}\cdot 2=\frac{1}{2}=0{,}5;$

в) $\log_{\sqrt{3}}27=\log_{(3)^{\frac{1}{2}}}27=2\log_3 27=2\log_3 3^3=2\cdot 3\cdot\log_3 3=6\cdot 1=6;$

г) $\log_3 3\sqrt{3}=\log_3 3+\log_3\sqrt{3}=1+\log_3 3^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}=1{,}5;$

д) $\log_2 81-2\log_2 3+\log_2\frac{2}{9}=\log_2 81-\log_2 3^2+\log_2\frac{2}{9}=\log_2\left(81:9\cdot\frac{2}{9}\right)=\log_2 2=1;$

е) $\log_3^2 81+\log_6 12-\log_6 2=(\log_3 81)^2+\log_6\frac{12}{2}=4^2+\log_6 6=16+1=17.$

Ответ: а) 2; б) 0,5; в) 6; г) 1,5; д) 1; е) 17.

36 Найдите $\log_a\frac{a}{b^4}$, если $\log_a b=6$.

Решение:

$$\log_a\frac{a}{b^4}=\log_a a-\log_a b^4=1-4\log_a b=1-4\cdot 6=1-24=-23.$$

Ответ: –23.

37 Найдите $\log_a\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, если $\log_a b=-2$.

Решение:

$$\log_a\sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\log_a\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\log_a\frac{a}{b}=\frac{1}{3}(\log_a a-\log_a b)=\frac{1}{3}(1-(-2))=\frac{1}{3}\cdot 3=1.$$

Ответ: 1.

ДЕСЯТИЧНЫЙ И НАТУРАЛЬНЫЙ ЛОГАРИФМЫ, ЧИСЛО *e*

Десятичным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию 10. Обозначают $\lg a$ вместо $\log_{10} a$.

Натуральным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию *e*, где *e* — иррациональное число, приближённо равное 2,7. Обозначают $\ln a$ вместо $\log_e a$.

Формула перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Практические задания

38 Вычислите.

а) $5^{\frac{\lg 81}{\lg 3}} = 5^{\log_3 81} = 5 \cdot 4 = 20;$

б) $\left(15^{\log_7 5}\right)^{\log_5 7} = 15^{\log_7 5 \cdot \log_5 7} = 15^1 = 15;$

в) $\dfrac{\log_7 \sqrt[4]{15}}{\log_7 15} = \log_{15} \sqrt[4]{15} = \log_{15} (15)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\log_{15} 15 = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4} = 0{,}25;$

г) $8^{\frac{1}{\log_7 8}} = 8^{\log_8 7} = 7;$

д) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 7 \cdot \log_7 16) = \log_{\frac{1}{2}}(\dfrac{1}{\log_7 2} \cdot \log_7 16) = \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{\log_7 16}{\log_7 2} = \log_{\frac{1}{2}} \log_2 16 =$

$= \log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{2^{-1}} 4 = -1 \cdot \log_2 4 = -1 \cdot 2 = -2;$

е) $\log_3 16 \cdot \log_2 \dfrac{1}{81} = \log_3 2^4 \cdot \log_2 3^{-4} = 4 \cdot (-4) \cdot \log_3 2 \cdot \log_2 3 = -16 \cdot 1 = -16;$

ж) $\log_{\sin 45^\circ} 16 = \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} 16 = \log_{\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^1}} 16 = \log_{2^{\frac{1}{2}-1}} 16 = \log_{2^{-\frac{1}{2}}} 16 = -2 \cdot \log_2 16 =$

$= -2 \cdot 4 = -8;$

з) $\log_3 8 \cdot \log_{16} 27 = \log_3 2^3 \cdot \log_{2^4} 3^3 = 3\log_3 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot \log_2 3 = \frac{9}{4}\log_3 2 \cdot \log_2 3 =$

$= 2{,}25 \cdot 1 = 2{,}25;$

и) $\dfrac{\ln\sqrt{3} \cdot \log_{81} 5}{\ln 25} = \dfrac{\ln 3^{\frac{1}{2}} \cdot \log_{3^4} 5}{\ln 5^2} = \dfrac{\frac{1}{2}\ln 3 \cdot \frac{1}{4}\log_3 5}{2\ln 5} = \dfrac{\frac{1}{8}\ln 3 \cdot \log_3 5}{2\ln 5} =$

$= \dfrac{\frac{1}{8}\log_5 3 \cdot \log_3 5}{2} = \dfrac{\frac{1}{8}}{2} = \dfrac{1}{16} = 0{,}0625;$

к) $\dfrac{\log_{\sqrt{7}} 14}{\log_7 5} - \dfrac{1}{\log_{196} 5} = \dfrac{\log_{7^{\frac{1}{2}}} 14}{\log_7 5} - \log_5 196 = \dfrac{2\log_7 14}{\log_7 5} - \log_5 14^2 =$

$= 2\log_5 14 - 2\log_5 14 = 0;$

л) $2^{\lg 5 \cdot \log_5 0{,}01} = 2^{\lg 5 \cdot \log_5 \frac{1}{100}} = 2^{\lg 5 \cdot \log_5 10^{-2}} = 2^{\lg 5 \cdot (-2\log_5 10)} =$

$= 2^{-2(\log_{10} 5 \cdot \log_5 10)} = 2^{-2 \cdot 1} = 2^{-2} = \frac{1}{4} = 0{,}25;$

м) $\log_{\sqrt[3]{5^2}} 7 \cdot \log_{\sqrt{7}} 5 = \log_{5^{\frac{2}{3}}} 7 \cdot \log_{7^{\frac{1}{2}}} 5 = \frac{3}{2}\log_5 7 \cdot (2\log_7 5) =$

$= \left(\frac{3}{2} \cdot 2\right) \cdot (\log_5 7 \cdot \log_7 5) = 3 \cdot 1 = 3.$

Ответ: а) 20; б) 15; в) 0,25; г) 7; д) –2; е) –16; ж) –8; з) 2,25; и) 0,0625; к) 0; л) 0,25; м) 3.

$(a+b)^2$ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ

Данный раздел содержит основные сведения о преобразованиях выражений, включающих арифметические операции. Рассматриваются преобразования иррациональных, тригонометрических и логарифмических выражений и выражений, содержащих знак абсолютной величины.

$$\frac{ab}{cb}=\frac{a}{c}$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, ВКЛЮЧАЮЩИХ АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Подобные слагаемые

Слагаемые, имеющие одинаковую буквенную часть, называются **подобными слагаемыми**.

Чтобы привести подобные слагаемые, надо сложить их коэффициенты и результат умножить на общую буквенную часть.
Например:

а) $x^2-x+4-2x^2+5x-1=\left(x^2-2x^2\right)+$

$+(-x+5x)+(4-1)=x^2(1-2)+x(-1+5)+$

$+3=-1x^2+4x+3=-x^2+4x+3;$

б) $xy-x^2-5-yx+3x^2+5x^2y=$

$=(xy-yx)+\left(-x^2+3x^2\right)-5+5x^2y=$

$=0+x^2(-1+3)-5+5x^2y=2x^2+$

$+5x^2y-5.$

Раскрытие скобок

Если перед скобками стоит знак «+», то можно опустить скобки и знак «+», сохранив знаки слагаемых, стоящих в скобках. Если первое слагаемое в скобках записано без знака, то его следует записать со знаком «+».

Если перед скобками стоит знак «–», надо заменить этот знак на «+», поменяв знаки всех слагаемых в скобках на противоположные, а затем раскрыть скобки.
Например:

а) $(x-y)+(x-2y)=x-y+x-2y=$

$=2x-3y;$

б) $6-(3-4x)=6+(-3+4x)=6-3+$

$+4x=4x+3.$

Распределительное свойство

$$a(b \pm c) = ab \pm ac$$

Например:

а) $8(3x-4) = 8\cdot 3x - 8\cdot 4 = 24x - 32$;

б) $7x - 3(2x-4) = 7x - 3\cdot 2x - 3\cdot(-4) =$

$= 7x - 6x + 12 = x + 12$.

Чтобы умножить одну сумму на другую, надо каждое слагаемое первой суммы умножить на каждое слагаемое второй суммы и сложить полученные произведения.
Например.
Упростим выражение:

$(2x-3)(x-4) = 2x\cdot x + 2x\cdot(-4) -$

$-3\cdot x - 3\cdot(-4) = 2x^2 - 8x - 3x +$

$+12 = 2x^2 - 11x + 12$.

Способы разложения на множители

1. Вынесение общего множителя за скобки
Например:

а) $879\cdot 147 - 147\cdot 679 =$

$= 147\cdot(879 - 679) = 147\cdot 200 = 29\,400$;

б) $999\cdot 156 + 156 = 999\cdot 156 + 156\cdot 1 =$

$= 156(999+1) = 156\cdot 1000 = 156\ 000$;

в) $4x^2y + 6xy^2 - 2xy = 2xy(2x + 3y - 1)$;

г) $x^8 - x^6 + x^4 = x^4(x^4 - x^2 + 1)$.

2. Способ группировки
Сгруппируем слагаемые таким образом, чтобы слагаемые в каждой группе имели общий множитель, который можно будет вынести за скобку.
Например:

$15a + 10b - 5ab - 30 = (15a - 5ab) +$

$+(10b - 30) = 5a(3-b) - 10(3-b) =$

$= (3-b)(5a-10) = 5(3-b)(a-2)$.

3. Использование формул сокращённого умножения

Формулы сокращённого умножения

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

4. Разложение квадратного трёхчлена на множители

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1, x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$

5. Выделение полного квадрата
Суть данного метода состоит в выделении полного квадрата и последующем применении формулы разности квадратов.

Практические задания

39 Найдите значения выражений.

а) $(3a-4b)(3a+4b)-(3a-4b)^2$ при $a=-17$ и $b=2{,}5$.

Решение:

$(3a-4b)(3a+4b)-(3a-4b)^2=(3a-4b)\left((3a+4b)-(3a-4b)\right)=(3a-4b)\times$

$\times(3a+4b-3a+4b)=(3a-4b)\cdot 8b=(3\cdot(-17)-4\cdot 2{,}5)\cdot 8\cdot 2{,}5=-61\cdot 20=-1220.$

Ответ: -1220.

б) $(9a-7b)^2-(9a+7b)^2$ при $a=0{,}01$ и $b=10$.

Решение:

$(9a-7b)^2-(9a+7b)^2=\left((9a-7b)-(9a+7b)\right)\left((9a-7b)+(9a+7b)\right)=$

$=(9a-7b-9a-7b)(9a-7b+9a+7b)=-14b\cdot 18a=-14\cdot 10\cdot 18\cdot 0{,}01=-25{,}2.$

Ответ: $-25{,}2$.

40 Найдите значение выражения, используя способ группировки.

$x^2+9x-ax-9a$ при $x=2{,}59$ и $a=1{,}59$.

Решение:

$x^2+9x-ax-9a=\left(x^2+9x\right)+(-ax-9a)=x(x+9)-a(x+9)=(x+9)(x-a)=$

$=(2{,}59+9)(2{,}59-1{,}59)=11{,}59.$

Ответ: $11{,}59$.

41 Вычислите с помощью формулы разности квадратов.

а) $\left(789^2-311^2\right):1100=(789-311)(789+311):1100=478\cdot 1100:1100=478;$

б) $\dfrac{98^2-0{,}79^2}{98{,}79}=\dfrac{(98-0{,}79)(98+0{,}79)}{98{,}79}=\dfrac{97{,}21\cdot 98{,}79}{98{,}79}=97{,}21.$

Ответ: а) 478; б) 97,21.

42 Найдите значение выражения: $x^2-13x+42$ при $x=17$.

Решение:

1) $x^2-13x+42=0,\ \ x_1=6,\ x_2=7;$

2) $\left(x^2-13x+42\right)=1\cdot(x-6)(x-7)=(17-6)(17-7)=11\cdot 10=110.$

Ответ: 110.

43 Разложите на множители выделением полного квадрата.

$$4x^4+1=4x^4+4x^2+1-4x^2=\left(2x^2+1\right)^2-(2x)^2=\left(2x^2+1-2x\right)\left(2x^2+1+2x\right)=$$

$$=\left(2x^2-2x+1\right)\left(2x^2+2x+1\right).$$

Ответ: $\left(2x^2-2x+1\right)\left(2x^2+2x+1\right).$

Сокращение дробей

$$\frac{ab}{cb}=\frac{a}{c}$$

Например:

$$\frac{x^2-25}{x^2-10x+25}=\frac{x^2-5^2}{x^2-2\cdot 5\cdot x+5^2}=$$

$$=\frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)^2}=\frac{x+5}{x-5}.$$

Сложение и вычитание рациональных дробей

Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями сводится к сложению и вычитанию дробей с одинаковыми знаменателями. Для этого данные дроби приводят к общему знаменателю.

Практические задания

44 Упростите выражения.

а) $\dfrac{3x}{x^2-25y^2}-\dfrac{3}{x+5y}=\dfrac{3x^{\backslash 1}}{(x-5y)(x+5y)}-\dfrac{3^{\backslash x-5y}}{x+5y}=\dfrac{3x-3(x-5y)}{(x-5y)(x+5y)}=$

$=\dfrac{3x-3x+15y}{(x-5y)(x+5y)}=\dfrac{15y}{x^2-25y^2};$

б) $10x-\frac{20x^2-5}{2x-1}=\frac{10x^{\backslash 2x-1}}{1}-\frac{20x^2-5^{\backslash 1}}{2x-1}=\frac{10x(2x-1)-\left(20x^2-5\right)}{2x-1}=$

$=\frac{20x^2-10x-20x^2+5}{2x-1}=\frac{-10x+5}{2x-1}=\frac{-5(2x-1)}{2x-1}=-5.$

Ответ: а) $\frac{15y}{x^2-25y^2}$; б) -5.

Умножение и деление рациональных дробей

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \qquad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

Практические задания

45 Упростите выражения.

а) $\frac{2x-6}{xy-y}\cdot\frac{x^2-2x+1}{x-3}=\frac{2(x-3)}{y(x-1)}\cdot\frac{(x-1)^2}{x-3}=\frac{2(x-3)(x-1)^2}{y(x-1)(x-3)}=\frac{2(x-1)}{y}=\frac{2x-2}{y}$;

б) $\frac{x-y}{3}:\left(x^2-2xy+y^2\right)=\frac{x-y}{3}\cdot\frac{1}{x^2-2xy+y^2}=\frac{x-y}{3}\cdot\frac{1}{(x-y)^2}=$

$=\frac{(x-y)\cdot 1}{3(x-y)^2}=\frac{1}{3(x-y)}=\frac{1}{3x-3y}$;

в) $(2x-1)^2:\frac{4x-2}{3x-1}=\frac{(2x-1)^2}{1}:\frac{4x-2}{3x-1}=\frac{(2x-1)^2}{1}\cdot\frac{3x-1}{4x-2}=\frac{(2x-1)^2\cdot(3x-1)}{1\cdot 2(2x-1)}=$

$=\frac{(2x-1)(3x-1)}{2}=\frac{6x^2-2x-3x+1}{2}=\frac{6x^2-5x+1}{2}.$

Ответ: а) $\frac{2x-2}{y}$; б) $\frac{1}{3x-3y}$; в) $\frac{6x^2-5x+1}{2}$.

46 Найдите значение числового выражения:

$$x\left(x^2-49\right)\left(\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x+7}\right)$$ при $x = 1{,}4$.

Решение:

$$x\left(x^2-49\right)\left(\frac{1^{\backslash x+7}}{x-7}-\frac{1^{\backslash x-7}}{x+7}\right)=x(x-7)(x+7)\left(\frac{x+7-(x-7)}{(x-7)(x+7)}\right)=x(x-7)(x+7)\times$$

$$\times\left(\frac{x+7-x+7}{(x-7)(x+7)}\right)=x(x-7)(x+7)\frac{14}{(x-7)(x+7)}=14x=14\cdot 1{,}4=19{,}6.$$

Ответ: 19,6.

47 Упростите выражение.

$$\frac{x-\frac{4x-4}{x}}{\frac{2}{x}-1}=\frac{\left(x-\frac{4x-4}{x}\right)\cdot x}{\left(\frac{2}{x}-1\right)\cdot x}=\frac{x\cdot x-\frac{4x-4}{x}\cdot x}{\frac{2}{x}\cdot x-1\cdot x}=\frac{x^2-(4x-4)}{2-x}=$$

$$=\frac{x^2-4x+4}{2-x}=\frac{(x-2)^2}{2-x}=\frac{(2-x)^2}{2-x}=2-x.$$

Ответ: $2-x$.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, ВКЛЮЧАЮЩИХ ОПЕРАЦИЮ ВОЗВЕДЕНИЯ В СТЕПЕНЬ

Чтобы **произведение возвести в степень**, необходимо каждый множитель возвести в эту степень.

Чтобы **дробь возвести в степень**, необходимо числитель и знаменатель возвести в эту степень.

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-n}=a^n \qquad a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Например:

а) $\left(2x^2y\right)^3 = 2^3 \cdot \left(x^2\right)^3 \cdot y^3 = 8 \cdot x^{2\cdot3} \cdot y^3 = 8x^6y^3;$

б) $\left(\dfrac{3x^{-1}}{y^5}\right)^2 = \dfrac{\left(3x^{-1}\right)^2}{\left(y^5\right)^2} = \dfrac{3^2 \cdot \left(x^{-1}\right)^2}{y^{5\cdot2}} = \dfrac{9x^{-1\cdot2}}{y^{10}} = \dfrac{9x^{-2}}{y^{10}} = \dfrac{9}{x^2y^{10}}.$

Практические задания

48 Найдите значения выражений.

а) $\dfrac{x^{-4}\cdot x^8}{x^6}$ при $x=-5$.

Решение:

$$\frac{x^{-4}\cdot x^8}{x^6} = \frac{x^{-4+8}}{x^6} = \frac{x^4}{x^6} = x^{4-6} = x^{-2} = (-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25} = \frac{1\cdot4}{25\cdot4} = \frac{4}{100} = 0{,}04.$$

Ответ: 0,04.

б) $\dfrac{x^{-9}}{\left(x^2\right)^{-3}}$ при $x=\dfrac{1}{2}$.

Решение:

$$\frac{x^{-9}}{\left(x^2\right)^{-3}} = \frac{x^{-9}}{x^{2\cdot(-3)}} = \frac{x^{-9}}{x^{-6}} = x^{-9-(-6)} = x^{-9+6} = x^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8.$$

Ответ: 8.

в) $\left(\left(7^{\sqrt{13}}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{7}\right)^{\sqrt{11}}\right)^{\sqrt{13}+\sqrt{11}} = \left(\left(7^{\sqrt{13}}\right)\cdot\left(7^{-1}\right)^{\sqrt{11}}\right)^{\sqrt{13}+\sqrt{11}} = \left(\left(7^{\sqrt{13}}\right)\cdot\left(7^{-\sqrt{11}}\right)\right)^{\sqrt{13}+\sqrt{11}} =$

$= \left(7^{\sqrt{13}-\sqrt{11}}\right)^{\sqrt{13}+\sqrt{11}} = 7^{\left(\sqrt{13}-\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{13}+\sqrt{11}\right)} = 7^{\left(\sqrt{13}\right)^2-\left(\sqrt{11}\right)^2} = 7^{13-11} = 7^2 = 49.$

Ответ: 49.

г) $\dfrac{(5x)^3\cdot x^{-10}}{x^{-3}\cdot x^{-8}}$ при $x=2$.

Решение:

$$\frac{(5x)^3\cdot x^{-10}}{x^{-3}\cdot x^{-8}}=\frac{5^3\cdot x^3\cdot x^{-10}}{x^{-3+(-8)}}=\frac{125x^{-7}}{x^{-11}}=125x^{-7-(-11)}=125x^{-7+11}=125x^4=$$

$$=125\cdot 2^4=125\cdot 16=2000.$$

Ответ: 2000.

Преобразование показательных выражений

При преобразовании показательных выражений используются свойства степеней с действительным показателем.

$\boldsymbol{y=a^x,\ a>0,\ a\neq 1,}$

$\boldsymbol{x\in R,\ y>0}$

Практические задания

49 Найдите значения выражений.

а) $x+7^{2x-1}\cdot 49^{1-x}$, если $x=11$.

Решение:

$$x+7^{2x-1}\cdot 49^{1-x}=x+7^{2x-1}\cdot\left(7^2\right)^{1-x}=x+7^{2x-1}\cdot 7^{2-2x}=x+7^{2x-1+2-2x}=$$

$$=x+7^1=x+7=11+7=18.$$

Ответ: 18.

б) $25^{3x-2}:125^{2x-2}:x$, если $x=125$.

Решение:

$$25^{3x-2}:125^{2x-2}:x=\left(5^2\right)^{3x-2}:\left(5^3\right)^{2x-2}:x=5^{6x-4}:5^{6x-6}:x=5^{6x-4-6x+6}:x=$$

$$=5^2:x=25:x=25:125=\frac{1}{5}=0{,}2.$$

Ответ: 0,2.

в) $f(2x+3)$, если $f(x)=3^x$ и $x=-1$.

Решение:

Запись $f(2x+3)$ означает, что вместо x в формулу функции подставляется выражение $2x+3$: $f(2x+3)=3^{2x+3}=3^{2\cdot(-1)+3}=3^{-2+3}=3^1=3$.

Ответ: 3.

г) $f(x-1)$, если $f(x)=0{,}2^{2x-3}$ и $x=5$.

Решение:

Запись $f(x-1)$ означает, что вместо x в формулу функции подставляется выражение $x-1$:

$f(x-1)=0{,}2^{2(x-1)-3}=0{,}2^{2x-2-3}=0{,}2^{2x-5}=0{,}2^{2\cdot5-5}=0{,}2^5=0{,}000\,32$.

Ответ: 0,000 32.

д) $\dfrac{f(x-8)}{f(x-6)}$, если $f(x)=5^x$.

Решение:

$$\frac{f(x-8)}{f(x-6)}=\frac{5^{x-8}}{5^{x-6}}=5^{(x-8)-(x-6)}=5^{x-8-x+6}=5^{-2}=\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25}=\frac{1\cdot4}{25\cdot4}=\frac{4}{100}=0{,}04.$$

Ответ: 0,04.

е) $f(2x+3)\cdot f(1-2x)$, если $f(x)=2^{-x}$.

Решение:

$$f(2x+3)\cdot f(1-2x)=2^{-(2x+3)}\cdot2^{-(1-2x)}=2^{-2x-3}2^{-1+2x}=2^{-2x-3-1+2x}=2^{-4}=$$

$$=\frac{1}{2^4}=0{,}0625.$$

Ответ: 0,0625.

ж) $\dfrac{9^{3x}\cdot2^{2x-3}}{27^{2x-1}\cdot4^x}$, если $x=43$.

Решение:

$$\frac{9^{3x}\cdot2^{2x-3}}{27^{2x-1}\cdot4^x}=\frac{\left(3^2\right)^{3x}\cdot2^{2x-3}}{\left(3^3\right)^{2x-1}\cdot\left(2^2\right)^x}=\frac{3^{6x}\cdot2^{2x-3}}{3^{6x-3}\cdot2^{2x}}=3^{6x-(6x-3)}\cdot2^{2x-3-2x}=$$

$$=3^{6x-6x+3}\cdot 2^{-3}=3^3\cdot\frac{1}{2^3}=27\cdot\frac{1}{8}=\frac{27}{8}=3{,}375.$$

Ответ: 3,375.

з) $$\frac{2^{\sqrt{3}-3}}{0{,}5^{-\sqrt{3}+2}}=\frac{2^{\sqrt{3}-3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{3}+2}}=\frac{2^{\sqrt{3}-3}}{\left(2^{-1}\right)^{-\sqrt{3}+2}}=\frac{2^{\sqrt{3}-3}}{2^{-1\left(-\sqrt{3}+2\right)}}=\frac{2^{\sqrt{3}-3}}{2^{\sqrt{3}-2}}=2^{\sqrt{3}-3-\left(\sqrt{3}-2\right)}=$$

$$=2^{\sqrt{3}-3-\sqrt{3}+2}=2^{-1}=\frac{1}{2}=0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, ВКЛЮЧАЮЩИХ КОРНИ НАТУРАЛЬНОЙ СТЕПЕНИ

Корень чётной степени	Корень нечётной степени
$\sqrt[2n]{x},\ x\geq 0$	$\sqrt[2n+1]{x},\ x\in R$

Вынесение множителя за знак корня

Например:

а) $\sqrt{125}=\sqrt{25\cdot 5}=5\sqrt{5}$;

б) $\sqrt{54}=\sqrt{9\cdot 6}=3\sqrt{6}$;

в) $\sqrt{1\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$;

г) $\sqrt[3]{0{,}0081}=\sqrt[3]{0{,}027\cdot 0{,}3}=0{,}3\sqrt[3]{0{,}3}$;

д) $\sqrt[5]{-96}=\sqrt[5]{-32\cdot 3}=-2\sqrt[5]{3}$;

е) $\sqrt[4]{0{,}000\,2}=\sqrt[4]{0{,}000\,1\cdot 2}=0{,}1\sqrt[4]{2}$;

ж) $\sqrt{1575}=\sqrt{25\cdot 9\cdot 7}=5\cdot 3\sqrt{7}=15\sqrt{7}$.

Внесение множителя под знак корня

Например:

а) $5\sqrt{3}=\sqrt{5^2\cdot 3}=\sqrt{25\cdot 3}=\sqrt{75}$;

б) $-3\sqrt[4]{2}=-\sqrt[4]{3^4\cdot 2}=-\sqrt[4]{81\cdot 2}=-\sqrt[4]{162}$;

в) $-4\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{(-4)^3\cdot 5}=\sqrt[3]{-64\cdot 5}=\sqrt[3]{-320}$.

Освобождение от иррациональности в знаменателе

При преобразовании дробного выражения, в знаменателе которого содержится иррациональное выражение, необходимо записать дробь так, **чтобы в знаменателе не было радикалов**.

$$\frac{a}{b\sqrt[n]{y}}=\frac{a\cdot\sqrt[n]{y^{n-1}}}{b\sqrt[n]{y}\cdot\sqrt[n]{y^{n-1}}}=\frac{a\cdot\sqrt[n]{y^{n-1}}}{by}$$

Умножаем числитель и знаменатель на сопряжённое иррациональное выражение:

$$\frac{a}{\sqrt{x}\pm\sqrt{y}}=\frac{a\left(\sqrt{x}\mp\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}\pm\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}\mp\sqrt{y}\right)}=$$

$$=\frac{a\left(\sqrt{x}\mp\sqrt{y}\right)}{x-y}$$

Например:

а) $\frac{3}{2\sqrt{5}}=\frac{3\cdot\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{2\cdot 5}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$;

б) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=\frac{1\cdot\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$;

в) $\frac{3}{1-\sqrt{2}}=\frac{3\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)}{\left(1-\sqrt{2}\right)\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)}=\frac{3\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)}{1^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=$

$=\frac{3\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)}{1-2}=\frac{3\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)}{-1}=-3\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)=$

$=-3-3\sqrt{2}$;

г) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}=$

$=\frac{\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{5-2}=$

$=\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}-\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}{3}=\frac{5-\sqrt{10}}{3}$.

Используя свойства корней n-й степени, можно осуществить преобразование выражений, содержащих корни натуральной степени. Такие выражения называются **иррациональными**, или выражениями, **содержащими радикалы** (знаки корня).

Практические задания

50 Вычислите.

а) $\left(3\sqrt{5}-2\right)\left(3\sqrt{5}+2\right)=\left(3\sqrt{5}\right)^2-2^2=3^2\cdot\left(\sqrt{5}\right)^2-4=9\cdot 5-4=45-4=41$;

б) $\sqrt{104^2-40^2}=\sqrt{(104-40)(104+40)}=\sqrt{64\cdot 144}=8\cdot 12=96$;

в) $\frac{\sqrt{1{,}7}\cdot\sqrt{11{,}9}}{\sqrt{0{,}07}}=\sqrt{\frac{1{,}7\cdot 11{,}9}{0{,}07}}=\sqrt{\frac{1{,}7\cdot 11{,}9\cdot 100}{0{,}07\cdot 100}}=\sqrt{\frac{17\cdot 119}{7}}=\sqrt{17\cdot 17}=17$;

г) $\frac{\sqrt[5]{224}}{4\sqrt[5]{7}}=\frac{1}{4}\sqrt[5]{\frac{224}{7}}=\frac{1}{4}\sqrt[5]{32}=\frac{1}{4}\cdot 2=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=0{,}5;$

д) $\sqrt[4]{0{,}064\cdot 0{,}4}=\sqrt[4]{(0{,}4)^3\cdot 0{,}4}=\sqrt[4]{(0{,}4)^4}=0{,}4;$

е) $\frac{\left(\sqrt{19}+\sqrt{5}\right)^2}{12+\sqrt{95}}=\frac{\left(\sqrt{19}\right)^2+2\sqrt{19}\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2}{12+\sqrt{95}}=\frac{19+2\sqrt{95}+5}{12+\sqrt{95}}=\frac{24+2\sqrt{95}}{12+\sqrt{95}}=$

$=\frac{2\left(12+\sqrt{95}\right)}{12+\sqrt{95}}=2;$

ж) $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[6]{9}=\sqrt[3]{3^2}\cdot\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[3]{3^2}\cdot\sqrt[3\cdot 2]{3^2}=\sqrt[3]{3^2}\cdot\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3^2\cdot 3}=\sqrt[3]{3^3}=3;$

з) $\sqrt[4]{0{,}004}\cdot\sqrt[4]{0{,}4}=\sqrt[4]{0{,}004\cdot 0{,}4}=\sqrt[4]{0{,}001\,6}=\sqrt[4]{(0{,}2)^4}=0{,}2.$

Ответ: а) 41; б) 96; в) 17; г) 0,5; д) 0,4; е) 2; ж) 3; з) 0,2.

51 Найдите значения выражений.

а) $\frac{\sqrt[3]{4x}\cdot\sqrt[6]{4x}}{x\sqrt{x}}$ при $x=0{,}5$.

Решение:

$$\frac{\sqrt[3]{4x}\cdot\sqrt[6]{4x}}{x\sqrt{x}}=\frac{\sqrt[3\cdot 2]{(4x)^2}\cdot\sqrt[6]{4x}}{x\sqrt{x}}=\frac{\sqrt[6]{16x^2}\cdot\sqrt[6]{4x}}{x\sqrt{x}}=\frac{\sqrt[6]{16x^2\cdot 4x}}{x\sqrt{x}}=\frac{\sqrt[6]{2^6x^3}}{x\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt[3\cdot 2]{x^3}}{x\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}=\frac{2}{x}=\frac{2}{0{,}5}=\frac{20}{5}=4.$$

Ответ: 4.

б) $\frac{6\sqrt{y}+7}{\sqrt{y}}-\frac{7\sqrt{y}}{y}-2y+1$ при $y=11$.

Решение:

$$\frac{6\sqrt{y}+7}{\sqrt{y}}-\frac{7\sqrt{y}}{y}-2y+1=\frac{6\sqrt{y}+7}{\sqrt{y}}-\frac{7\sqrt{y}}{\sqrt{y}\cdot\sqrt{y}}-2y+1=\frac{6\sqrt{y}+7}{\sqrt{y}}-\frac{7}{\sqrt{y}}-2y+1=$$