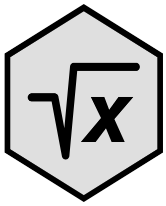
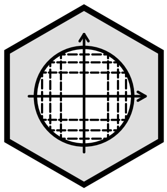
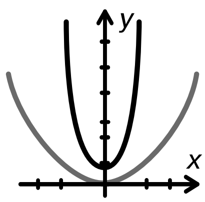
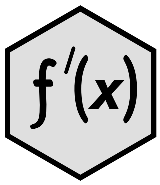
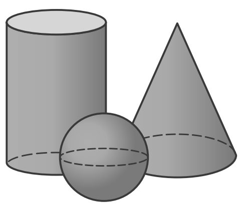
СОДЕРЖАНИЕ

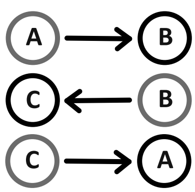












ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое пособие предназначено для систематизации и закрепления знаний учащихся по математике за курс средней школы.

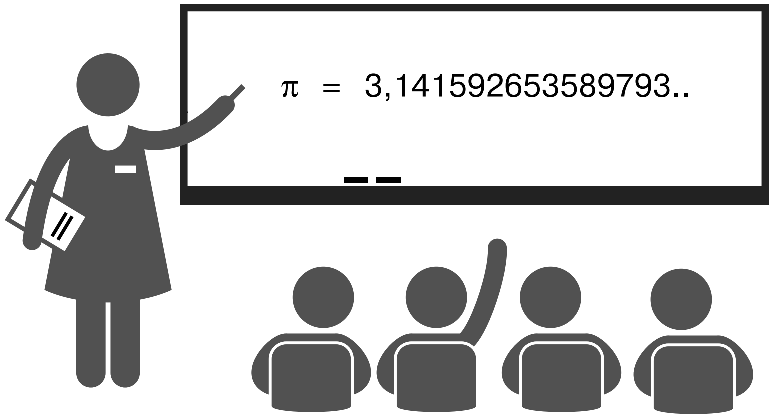
Книга содержит все изучаемые определения, правила, формулы, теоремы из курсов арифметики, алгебры, геометрии, начал математического анализа, комбинаторики, теории вероятностей и статистики. Представленный материал упорядочен и систематизирован, что поможет быстро сориентироваться и получить необходимую информацию.

Пособие будет полезно выпускникам для самостоятельной подготовки к единому государственному экзамену, так как обобщающий курс изложен последовательно от простого к сложному. В книге содержится дополнительный материал, необходимый для успешной сдачи ЕГЭ. Он включает метод рационализации, применяемый при решении неравенств, и координатный метод, используемый при решении стереометрических задач.

Теоретический материал иллюстрируют примеры с развёрнутым разъяснением, которые позволяют детально разобраться в темах школьного курса.

Издание, безусловно, поможет учащимся старших классов при подготовке к занятиям, различным формам текущего и промежуточного контроля, а также сдаче единого государственного экзамена.

Желаем успехов!



АЛГЕБРА

ЧИСЛА, КОРНИ И СТЕПЕНИ

В данном разделе рассматриваются действия с десятичными и обыкновенными дробями, рациональными, иррациональными и действительными числами. Представлены свойства степеней с натуральным, целым, рациональным и действительным показателем.

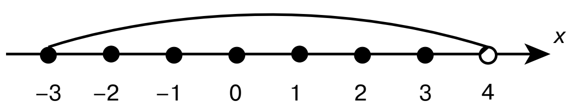
ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

Натуральные числа (1; 2; 3; 4; 5...), числа, им противоположные (–1; –2; –3; –4; –5...), и число нуль образуют множество **целых чисел**.

Множество натуральных (от лат. *naturalis* — природа) чисел имеет специальное обозначение — N; множество целых (нем. *zahl* — число) чисел — Z.

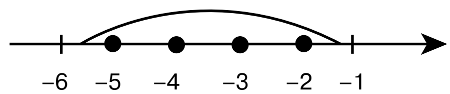
Найдите количество целых чисел, удовлетворяющих условию:

а) $x \in [-3;\ 4)$;



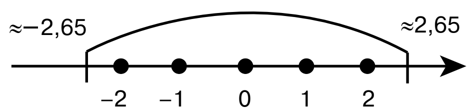
Ответ: 7.

б) $-5{,}6 < m \leq -1{,}3$.



Ответ: 4.

Множество чисел задано формулой $x_n = n^2 - 5$, где $n \in Z$. Сколько чисел из данного множества не больше 2?



$n^2 - 5 \leq 2,\ n^2 \leq 7,\ -\sqrt{7} \leq n \leq \sqrt{7}$.

Ответ: 5.

СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Степенью числа *a* с натуральным показателем *n*, бо́льшим 1, называется произведение *n* множителей, каждый из которых равен *a*.

Например:

$3^4 = 3\cdot3\cdot3\cdot3 = 81$;

$0{,}2^6 = 0{,}2\cdot0{,}2\cdot0{,}2\cdot0{,}2\cdot0{,}2\cdot0{,}2 = 0{,}000064$.

$$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \text{множителей}}$$

***a* — основание степени**

***n* — показатель степени**

Таблица квадратов

Десятки	Единицы									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Свойства степеней

$a^1 = a$

$(a^x)^y = a^{xy}$

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$a^x \cdot b^x = (ab)^x$

$\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, где $a \neq 0$

$\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$, где $b \neq 0$

При чётной степени

$a,\ b > 0$

$(-a)^n = b$ $\qquad -a^n = -b$

$(-3)^4 = 81$ $\qquad -3^4 = -81$

Таблица степеней

a^n	Значения n									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19 683	59 049
4^n	4	16	64	256	1024	4096				
5^n	5	25	125	625	3125	15 625				
6^n	6	36	216	1296	7776	46 656				
7^n	7	49	343	2401	16 807					
8^n	8	64	512	4096	32 768					
9^n	9	81	729	6561	59 049					

Если в основании отрицательное число

$a^n > 0$, если n — чётное число (2; 4; 6...):

$(-3)^4 = 81.$

$a^n < 0$, если n — нечётное число (1; 3; 5...):

$(-2)^5 = -32.$

а) $\dfrac{8^2}{2^5}=\dfrac{\left(2^3\right)^2}{2^5}=\dfrac{2^{3\cdot 2}}{2^5}=\dfrac{2^6}{2^5}=2^{6-5}=2^1=2;$

б) $\dfrac{6^{25}\cdot 9^{11}}{27^{15}\cdot 4^{12}}=\dfrac{(2\cdot 3)^{25}\cdot\left(3^2\right)^{11}}{\left(3^3\right)^{15}\cdot\left(2^2\right)^{12}}=\dfrac{2^{25}\cdot 3^{25}\cdot 3^{22}}{3^{45}\cdot 2^{24}}=\dfrac{2^{25}\cdot(3^{25}\cdot 3^{22})}{2^{24}\cdot 3^{45}}=\dfrac{2^{25}\cdot 3^{47}}{2^{24}\cdot 3^{45}}=2^{25-24}\cdot 3^{47-45}=2^1\cdot 3^2=18.$

ДРОБИ

Число вида $\dfrac{m}{n}$, где $m\in Z$, $n\in N$, называют **обыкновенной дробью**.

$$\frac{m}{n}\quad \begin{array}{l}\leftarrow \textbf{числитель}\\ \leftarrow \textbf{знаменатель}\end{array}$$

Любое число, знаменатель дробной части которого выражается единицей с одним или несколькими нулями, можно представить в виде **десятичной дроби**.
Например:

$\dfrac{3}{10}=0{,}3;\quad \dfrac{3}{100}=0{,}03;$

$2\dfrac{3}{1000}=2{,}003;\quad \dfrac{-7}{100}=-0{,}07.$

Основное свойство дроби
Если числитель и знаменатель дроби умножить (разделить) на одно и то же число, отличное от 0, то получится дробь, равная данной.

$$\boldsymbol{\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}}\textbf{, где } \boldsymbol{c\neq 0}$$

Например:

$\dfrac{0{,}35}{0{,}4}=\dfrac{0{,}35\cdot 100}{0{,}4\cdot 100}=\dfrac{35}{40}=\dfrac{7}{8}.$

ДЕЙСТВИЯ С ОБЫКНОВЕННЫМИ ДРОБЯМИ

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}\qquad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$$

Выделение целой части из неправильной дроби:

$\dfrac{17}{7}=2\dfrac{3}{7}$

$$\begin{array}{r|l} -17 & 7 \\ \underline{14} & 2 \\ 3 & \end{array}$$

Перевод обыкновенной дроби в десятичную:

$\dfrac{17}{8}=2{,}125;$

$\dfrac{3}{25}=\dfrac{3\cdot 4}{25\cdot 4}=\dfrac{12}{100}=0{,}12;$

$\dfrac{3}{8}=\dfrac{3\cdot 125}{8\cdot 125}=\dfrac{375}{1000}=0{,}375.$

$$\begin{array}{r|l} -17 & 8 \\ \underline{16} & 2{,}125 \\ -10 & \\ \underline{8} & \\ -20 & \\ \underline{16} & \\ -40 & \\ \underline{40} & \\ 0 & \end{array}$$

Перевод смешанного числа в неправильную дробь:

$3\dfrac{5}{9}=\dfrac{3\cdot 9+5}{9}=\dfrac{32}{9}.$

Чтобы **сложить (вычесть) смешанные числа**, надо:
1) привести дробные части этих чисел к наименьшему общему знаменателю;
2) отдельно выполнить сложение (вычитание) целых частей и отдельно — дробных частей.

- Если при сложении дробных частей получилась неправильная дробь, выделить целую часть из этой дроби и прибавить её к полученной целой части.
- Если дробная часть уменьшаемого меньше дробной части вычитаемого, превратить её в неправильную дробь, уменьшив на единицу целую часть.

а) $2\frac{7^{\backslash 2}}{9}+3\frac{5^{\backslash 3}}{6}=2\frac{14}{18}+3\frac{15}{18}=5\frac{29}{18}=6\frac{11}{18}$;

б) $7-3\frac{2}{11}=6\frac{11}{11}-3\frac{2}{11}=3\frac{9}{11}$;

в) $9\frac{7^{\backslash 2}}{15}-2\frac{5^{\backslash 5}}{6}=9\frac{14}{30}-2\frac{25}{30}=8\frac{44}{30}-2\frac{25}{30}=$

$=6\frac{19}{30}$;

г) $3\frac{5}{6}-2=1\frac{5}{6}$.

Чтобы выполнить **умножение смешанных чисел**, надо:
1) записать смешанные части в виде неправильных дробей;
2) найти произведение числителей и произведение знаменателей этих дробей;
3) первое произведение записать числителем, а второе — знаменателем.

$$2\frac{1}{3}\cdot 4\frac{2}{7}=\frac{7}{3}\cdot\frac{30}{7}=\frac{7\cdot 30}{3\cdot 7}=10.$$

Чтобы выполнить **деление смешанных чисел**, надо:
1) записать смешанные части в виде неправильных дробей;
2) делимое умножить на число, обратное делителю.

а) $2\frac{3}{5}:1\frac{6}{7}=\frac{13}{5}:\frac{13}{7}=\frac{13}{5}\cdot\frac{7}{13}=\frac{7}{5}=1\frac{2}{5}$;

б) $\frac{3}{7}:14=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{14}=\frac{3}{98}$;

в) $2:1\frac{3}{5}=2:\frac{8}{5}=\frac{2}{1}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}=1{,}25$.

$$\frac{2\frac{1}{4}}{3\frac{3}{5}}=\frac{2\frac{1}{4}\cdot 20}{3\frac{3}{5}\cdot 20}=\frac{2\cdot 20+\frac{1}{4}\cdot 20}{3\cdot 20+\frac{3}{5}\cdot 20}=\frac{40+5}{60+12}=$$

$$=\frac{45}{72}=\frac{5}{8}=0{,}625.$$

ДЕЙСТВИЯ С ДЕСЯТИЧНЫМИ ДРОБЯМИ

Чтобы **сложить (вычесть) десятичные дроби**, надо:
1) уравнять в этих дробях количество знаков после запятой;
2) записать их друг под другом так, чтобы запятая была записана под запятой;
3) выполнить сложение (вычитание), не обращая внимания на запятую;
4) поставить в ответе запятую под запятой.

а) $2{,}35+11{,}7=14{,}05$;

$$\begin{array}{r} 11{,}70 \\ +\ \ 2{,}35 \\ \hline 14{,}05 \end{array}$$

б) $12-10{,}346=1{,}654$;

$$\begin{array}{r} 12{,}000 \\ -\ 10{,}346 \\ \hline 1{,}654 \end{array}$$

в) $16{,}77+12{,}23=29{,}00=29$.

$$\begin{array}{r} 16{,}77 \\ +\ 12{,}23 \\ \hline 29{,}00 \end{array}$$

Чтобы **перемножить две десятичные дроби**, надо:
1) выполнить умножение, не обращая внимания на запятые;

2) отделить запятой столько цифр справа, сколько их стоит после запятой в обоих множителях вместе.

$3{,}25 \cdot 2{,}8 = 9{,}100 = 9{,}1.$

$$\begin{array}{r} \times\ 3{,}25 \\ 2{,}8 \\ \hline +\ 2600 \\ 650 \\ \hline 9{,}100 \end{array}$$

Чтобы **разделить десятичную дробь на натуральное число**, надо:
1) разделить дробь на это число, не обращая внимания на запятую;
2) поставить в частном запятую, когда кончится деление целой части.

а) $183{,}24 : 9 = 20{,}36;$

$$\begin{array}{l|l} -183{,}24 & 9 \\ \cline{2-2} \ \ 18 & 20{,}36 \\ \cline{1-1} \quad -32 & \\ \quad\ \ 27 & \\ \cline{1-1} \quad\ \ -54 & \\ \quad\quad\ 54 & \\ \cline{1-1} \quad\quad\ \ 0 & \end{array}$$

>>>

>>>

б) $70{,}15 : 23 = 3{,}05;$

$$\begin{array}{l|l} -70{,}15 & 23 \\ \cline{2-2} \ \ 69 & 3{,}05 \\ \cline{1-1} \ -115 & \\ \ \ \ 115 & \\ \cline{1-1} \quad\ \ 0 & \end{array}$$

в) $36 : 25 = 1{,}44.$

$$\begin{array}{l|l} -36 & 25 \\ \cline{2-2} \ \ 25 & 1{,}44 \\ \cline{1-1} -110 & \\ \ \ 100 & \\ \cline{1-1} \ \ -100 & \\ \quad 100 & \\ \cline{1-1} \quad\ \ 0 & \end{array}$$

Чтобы **разделить число на десятичную дробь**, надо:
1) в делимом и делителе перенести запятую вправо на столько цифр, сколько их после запятой в делителе;
2) после этого выполнить деление на натуральное число.

а) $25{,}6 : 0{,}08 = 2560 : 8 = 320;$

б) $12{,}35 : 2{,}5 = 123{,}5 : 25 = 4{,}94;$

в) $36 : 0{,}125 = 36000 : 125 = 288.$

ПРОЦЕНТЫ

Процентом (лат. *per cent* — на сотню) называется одна сотая часть величины.

$\mathbf{1\% = \frac{1}{100}}$	$\mathbf{100\% = 1}$
$\mathbf{3\% = 0{,}03}$ $\mathbf{(3:100)}$	$\mathbf{0{,}2 = 20\%}$ $\mathbf{(0{,}2 \cdot 100)}$

Шуба во время распродажи стоит 77 000 рублей. Скидки составляют 30%. Какова была стоимость шубы до распродажи?

Решение.

77 000 руб.	100% – 30% = 70%
x руб.	100%

$\dfrac{77\,000}{x} = \dfrac{70}{100}$; $x = \dfrac{77\,000 \cdot 100}{70} = 110\,000$ (руб.) — цена шубы до распродажи.

Ответ: 110 000.

Магазин закупает чашки по оптовой цене 120 рублей за штуку и продаёт с наценкой 30%. Какое наибольшее число таких чашек можно купить в этом магазине на 900 рублей?

Решение.

120 руб.	100%
x руб.	100% + 30% = 130%

1) $\frac{120}{x}=\frac{100}{130}$; $x=\frac{120\cdot130}{100}=156$ (руб.) — цена одной чашки с наценкой;

2) $900:156=5\ldots \Rightarrow 5$ чашек можно купить.

Ответ: 5.

Билет на поезд до Москвы стоил 2500 рублей, после подорожания стоимость билета составила 3000 рублей. На сколько процентов повысилась цена билета?

Решение.

2500 руб.	100%
3000 руб.	x%

1) $\frac{2500}{3000}=\frac{100}{x}$; $x=\frac{3000\cdot100}{2500}=120\%$;

2) 120% – 100% = 20% — повышение цены.

Ответ: 20%.

Первый сплав содержит 20% меди, второй — 10% меди. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 14% меди. Найдите массу первого сплава.

Решение.

Сплав	Масса сплава	Масса меди
1	x	$0,2x$
2	$200-x$	$0,1(200-x)$
полученный	200	$0,2x+0,1(200-x)$ $200\cdot0,14=28$

20% = 0,2; 10% = 0,1;
14% = 0,14;

$$0,2x+0,1(200-x)=28$$

$$0,2x+(20-0,1x)=28$$

$x=80$ (кг) — масса первого сплава.

Ответ: 80.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Целые и дробные числа (положительные и отрицательные) образуют множество **рациональных чисел**.
Множество рациональных (от лат. *ratio* — деление) чисел обозначается Q.

Любое рациональное число можно представить в виде обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$, где $m\in Z$, $n\in N$.

Например:

а) $5=\frac{5}{1}$;

б) $1,5=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$.

Любое рациональное число можно записать в виде десятичной дроби либо в виде периодической дроби.

Например:

а) $3 = 3{,}0$;

б) $\frac{3}{11} = 0{,}(27)$.

$$\begin{array}{r|l} -3 & 11 \\ \underline{0} & 0{,}2727\ldots \\ -30 & \\ \underline{22} & \\ -80 & \\ \underline{77} & \\ -30 & \\ \underline{22} & \\ -80 & \\ \underline{77} & \\ 3 & \end{array}$$

ДЕЙСТВИЯ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ И ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

$$\boxed{-(-a) = a}$$

Чтобы **сложить два отрицательных числа**, надо:
1) сложить их модули;
2) поставить перед полученным числом знак «–».

Например:

$-2 + (-7) = -(2+7) = -9$.

Чтобы **сложить два числа с разными знаками**, надо:
1) из большего модуля слагаемых вычесть меньший;
2) поставить перед полученным числом знак того слагаемого, модуль которого больше.

Например:

а) $-5 + 15 = +(15-5) = 10$;

б) $-17 + 11 = -(17-11) = -6$.

Чтобы из данного числа вычесть другое, надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.

Например:

а) $-2 - (-5) = -2 + 5 = 3$;

б) $8 - 9 = 8 + (-9) = -1$.

Чтобы **перемножить (разделить) два числа с разными** знаками, надо перемножить (разделить) модули этих чисел и поставить перед полученным числом знак «–».

Например:

а) $10 \cdot (-3{,}5) = -35$;

б) $-0{,}25 \cdot 4 = -1$;

в) $-7 : 2 = -3{,}5$.

Чтобы **перемножить (разделить) два отрицательных числа**, надо перемножить (разделить) их модули.

Например:

а) $-7 \cdot (-10) = +70 = 70$;

б) $-42 : (-7) = +6 = 6$.

СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ a \neq 0$$

$$a^0 = 1,\ a \neq 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n,\ a \neq 0,\ b \neq 0$$

а) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$;

б) $(-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^3} = -\frac{1}{64}$;

в) $(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}$;

г) $-3^{-6} = -\frac{1}{3^6} = -\frac{1}{729}$;

д) $\frac{9^{-2} \cdot 36}{16^{-2} \cdot 27} = \frac{(3^2)^{-2} \cdot (3^2 \cdot 2^2)}{(2^4)^{-2} \cdot 3^3} = \frac{3^{-4} \cdot 3^2 \cdot 2^2}{2^{-8} \cdot 3^3} = \frac{3^{-2} \cdot 2^2}{3^3 \cdot 2^{-8}} = \frac{2^8 \cdot 2^2}{3^3 \cdot 3^2} = \frac{2^{10}}{3^5} = \frac{1024}{243}$.

КОРЕНЬ СТЕПЕНИ $n>1$ И ЕГО СВОЙСТВА

Корнем n-й степени $(n \in N, n>1)$ из действительного числа a называется такое действительное число b, n-я степень которого равна a.

> $\sqrt[m]{a}$ не существует,
> если $a<0$ и m — чётное число.

а) $\sqrt{625}=25$, т. к. $25^2=625$;

б) $\sqrt[3]{64}=4$, т. к. $4^3=64$;

в) $\sqrt[3]{0{,}000\,027}=0{,}03$, т. к. $(0{,}03)^3=0{,}000\,027$.

> Если n — чётное число, то $\sqrt[n]{x^n}=|x|$.

а) $\sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)^2}=|3-\sqrt{2}|=3-\sqrt{2}$,

т. к. $3>\sqrt{2}$;

б) $\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}=|\sqrt{3}-\sqrt{5}|=\sqrt{5}-\sqrt{3}$,

т. к. $\sqrt{5}>\sqrt{3}$;

>>>

>>>

в) $\sqrt[3]{\left(3-\sqrt{2}\right)^3}=3-\sqrt{2}$;

г) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{4+3-4\sqrt{3}}=$

$=\sqrt{2^2-2\cdot 2\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=$

$=|2-\sqrt{3}|=2-\sqrt{3}$, т. к. $2>\sqrt{3}$.

Свойства корней n-й степени

Для любых $a\ge 0$, $b\ge 0$, $n\ge 2$, $m\ge 2$:

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}},\ b\neq 0$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}$$

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$$

а) $\sqrt{7\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{66}=\sqrt{\frac{22}{3}\cdot 66}=\sqrt{22\cdot 22}=22$;

б) $\sqrt{34^2-16^2}=\sqrt{(34-16)(34+16)}=$

$=\sqrt{18\cdot 50}=\sqrt{9\cdot 2\cdot 2\cdot 25}=3\cdot 2\cdot 5=30$.

СТЕПЕНЬ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ И ЕЁ СВОЙСТВА

Пусть $a>0$, $\frac{m}{n}$ — рациональное число $(n\ge 2, m\in Z, n\in N)$, тогда $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Например:

а) $7^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{7^2}=\sqrt[3]{49}$;

б) $3^{\frac{-4}{5}}=\sqrt[5]{3^{-4}}=\sqrt[5]{\frac{1}{3^4}}=\sqrt[5]{\frac{1}{81}}$.

Все свойства степени с натуральным показателем верны для степени с любым рациональным показателем и положительным основанием.

$$81^{\frac{1}{7}}\cdot 27^{\frac{1}{7}}=(81\cdot 27)^{\frac{1}{7}}=\left(3^4\cdot 3^3\right)^{\frac{1}{7}}=\left(3^7\right)^{\frac{1}{7}}=$$
$$=3^1=3.$$

$a>1$, r — рациональное число

Если $r>0$, то $a^r>1$

Если $r<0$, то $0<a^r<1$

$a>1$, r, t — рациональные числа

Если $r>t$, то $a^r>a^t$

$0<a<1$, r, t — рациональные числа

Если $r>t$, то $a^r<a^t$

Например:

а) $3^{\frac{1}{4}}>3^{\frac{1}{5}}$, т. к. $3>1$ и $\frac{1}{4}>\frac{1}{5}$;

б) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{8}}>\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$, т. к. $0<\frac{2}{5}<1$ и $\frac{3}{8}<\frac{1}{2}$;

в) $(3{,}7)^{-2{,}5}<1$, т. к. $3{,}7>1$, $-2{,}5<0$.

СВОЙСТВА СТЕПЕНИ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

При любом $x\in R$ и любом $a>0$ степень a^x является положительным действительным числом: $a^x>0$ при $x\in R$, $a>0$.

Все свойства степени с рациональным показателем верны для степени с действительным показателем.

а) $\left(9^{\sqrt{26}-5}\right)^{\sqrt{26}+5}=9^{(\sqrt{26}-5)(\sqrt{26}+5)}=$

$=9^{\left(\sqrt{26}\right)^2-5^2}=9^{26-25}=9;$

б) $7^{5\sqrt{5}-1}\cdot 7^{1-3\sqrt{5}}:7^{2\sqrt{5}-1}=$

$=7^{(5\sqrt{5}-1)+(1-3\sqrt{5})-(2\sqrt{5}-1)}=$

$=7^{5\sqrt{5}-1+1-3\sqrt{5}-2\sqrt{5}+1}=7^1=7;$

в) $\dfrac{5^{\sqrt{7}}\cdot 6^{\sqrt{7}}}{30^{\sqrt{7}-2}}=\dfrac{(5\cdot 6)^{\sqrt{7}}}{30^{\sqrt{7}-2}}=\dfrac{30^{\sqrt{7}}}{30^{\sqrt{7}-2}}=$

$=30^{\sqrt{7}-\left(\sqrt{7}-2\right)}=30^{\sqrt{7}-\sqrt{7}+2}=30^2=900.$

а) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{4}}}=\dfrac{3^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{4}}}=\dfrac{\left(3^{\frac{1}{4}}\right)^2-\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^2}{3^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{4}}}=$

$=\dfrac{\left(3^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(3^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{4}}\right)}{3^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{4}}}=3^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}.$

б) $\dfrac{2^{-\sqrt{7}}}{0{,}5^{\sqrt{7}+1}}=\dfrac{2^{-\sqrt{7}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{7}+1}}=\dfrac{2^{-\sqrt{7}}}{\left(2^{-1}\right)^{\sqrt{7}+1}}=\dfrac{2^{-\sqrt{7}}}{2^{-\sqrt{7}-1}}=$

$=2^{-\sqrt{7}-1\left(-\sqrt{7}-1\right)}=2^{-\sqrt{7}+\sqrt{7}+1}=2^1=2.$

в) $\dfrac{2^{2\sqrt{3}}}{0{,}25^{2-\sqrt{3}}}=\dfrac{2^{2\sqrt{3}}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{2-\sqrt{3}}}=\dfrac{2^{2\sqrt{3}}}{\left(2^{-2}\right)^{2-\sqrt{3}}}=\dfrac{2^{2\sqrt{3}}}{2^{-2\left(2-\sqrt{3}\right)}}=$

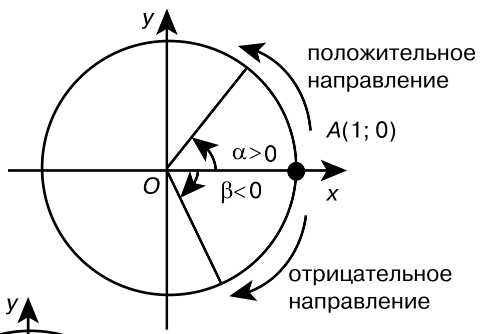
$=\dfrac{2^{2\sqrt{3}}}{2^{-4+2\sqrt{3}}}=2^{2\sqrt{3}-\left(-4+2\sqrt{3}\right)}=2^{2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}}=2^4=16.$

ОСНОВЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

Раздел посвящён тригонометрическим функциям, радианной и градусной мере угла. Рассматриваются основные тригонометрические формулы и их применение при упрощении выражений.

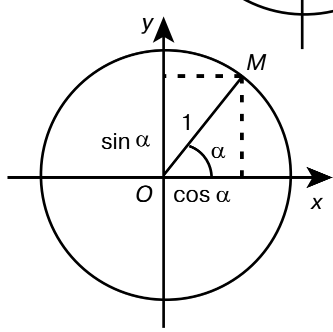
СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС, КОТАНГЕНС ПРОИЗВОЛЬНОГО УГЛА

Единичной окружностью в тригонометрии называют окружность радиуса 1 с центром в начале системы координат *xOy*.



Синусом угла α (sin α) называется ордината точки, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол α.

Косинусом угла α (cos α) называется абсцисса точки, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол α.

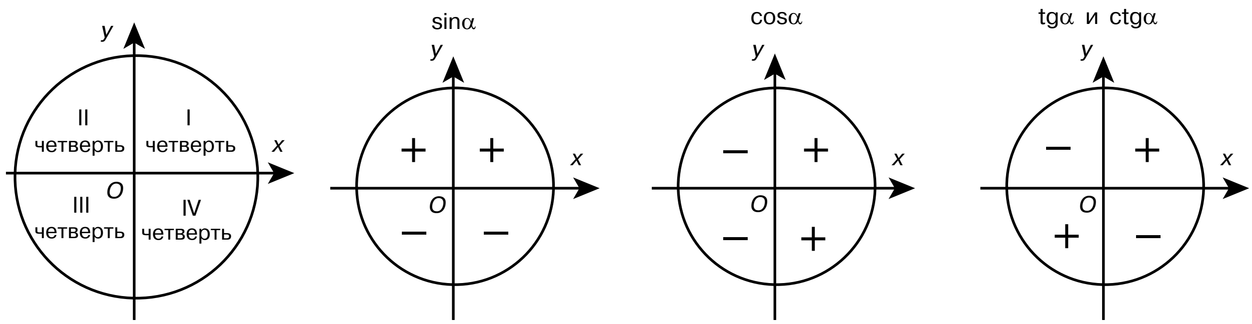


Тангенсом угла α (tg α) называется отношение синуса угла к его косинусу.

Котангенсом угла α (ctg α) называется отношение косинуса угла к его синусу.

$$\sin\alpha = y \qquad \cos\alpha = x \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

ЗНАКИ СИНУСА, КОСИНУСА, ТАНГЕНСА И КОТАНГЕНСА



Определите знаки синуса, косинуса и тангенса.

а) $\alpha = 240°$;

$\alpha = 240°$ — III четверть $\Rightarrow \sin\alpha < 0$,

$\cos\alpha < 0$, $\text{tg}\alpha > 0$;

б) $\beta = 500°$;

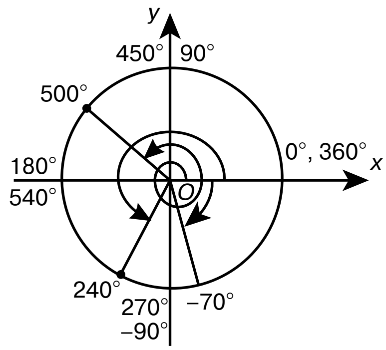
$\beta = 500°$ — II четверть $\Rightarrow \sin\beta > 0$,

$\cos\beta < 0$, $\text{tg}\beta < 0$;

в) $\gamma = -70°$;

$\gamma = -70^0$ — IV четверть $\Rightarrow \sin\gamma < 0$,

$\cos\gamma > 0$, $\text{tg}\gamma < 0$.

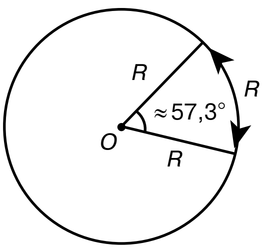


РАДИАННАЯ МЕРА УГЛА

Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется **углом в один радиан**.

$$1\ \text{рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \qquad 1° = \frac{\pi}{180}\ \text{рад}$$

$$\alpha\ \text{рад} = \left(\frac{180}{\pi}\cdot\alpha\right)^{\circ} \qquad \alpha° = \frac{\pi}{180}\cdot\alpha\ \text{рад}$$



Градусы	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Найдите радианную меру угла, выраженного в градусах.

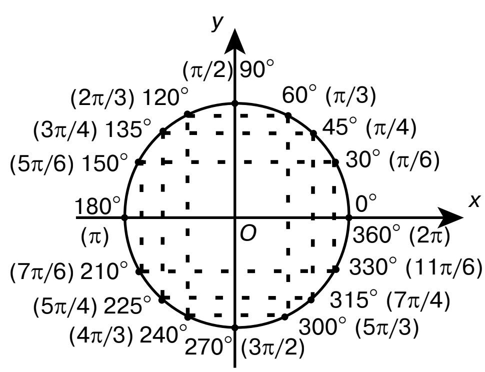
а) $80° = \frac{\pi}{180}\cdot 80 = \frac{4\pi}{9}$;

б) $290° = \frac{\pi}{180}\cdot 290 = \frac{29\pi}{18}$.

Найдите градусную меру угла, выраженного в радианах.

а) $\frac{\pi}{5} = \left(\frac{180}{\pi}\cdot\frac{\pi}{5}\right)^{\circ} = 36°$;

б) $3 = \left(\frac{180}{\pi}\cdot 3\right)^{\circ} = \left(\frac{540}{\pi}\right)^{\circ}$.

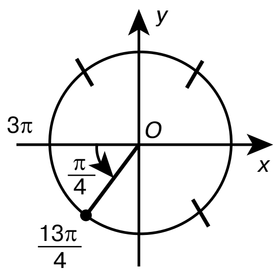


На единичной окружности постройте точку, полученную поворотом точки (1; 0) на заданный угол.

а) $\frac{13\pi}{4}$

$\frac{13\pi}{4} = 3\pi + \frac{\pi}{4};$

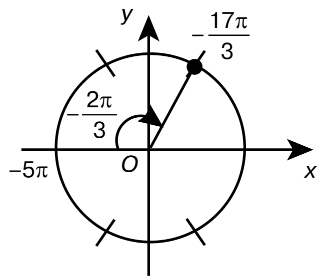
$\begin{array}{r|l} 13 & 4 \\ \underline{12} & 3 \\ 1 & \end{array}$



в) $-\frac{17\pi}{3}$

$-\frac{17\pi}{3} = -5\pi - \frac{2\pi}{3};$

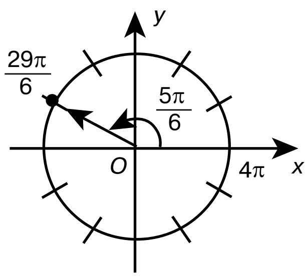
$\begin{array}{r|l} 17 & 3 \\ \underline{15} & 5 \\ 2 & \end{array}$



б) $\frac{29\pi}{6}$

$\frac{29\pi}{6} = 4\pi + \frac{5\pi}{6};$

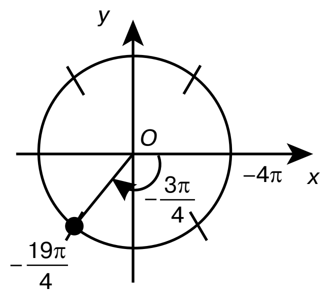
$\begin{array}{r|l} 29 & 6 \\ \underline{24} & 4 \\ 5 & \end{array}$



г) $-\frac{19\pi}{4}$

$-\frac{19\pi}{4} = -4\pi - \frac{3\pi}{4}.$

$\begin{array}{r|l} 19 & 4 \\ \underline{16} & 4 \\ 3 & \end{array}$



СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС, КОТАНГЕНС ЧИСЛА

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
$\operatorname{tg} t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\operatorname{ctg} t$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

Синусом числа *t* называют ординату точки единичной окружности, соответствующей числу t $(\sin t = y)$.

Косинусом числа *t* называют абсциссу точки единичной окружности, соответствующей числу t $(\cos t = x)$.

Тангенсом числа *t* называют отношение синуса числа t к косинусу $\left(\operatorname{tg} t = \dfrac{\sin t}{\cos t}\right)$.

$\sin(-t) = -\sin t$	$\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t$
$\cos(-t) = \cos t$	$\operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg} t$

Котангенсом числа *t* называют отношение косинуса числа t к синусу $\left(\operatorname{ctg} t = \dfrac{\cos t}{\sin t}\right)$.

ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1 \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Упростите выражения.

а) $2 - \sin^2 x - \cos^2 x = 2 - \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = 2 - 1 = 1;$

б) $\sin^2 t + \cos^2 t + \operatorname{ctg}^2 t = \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) + \operatorname{ctg}^2 t = 1 + \operatorname{ctg}^2 t = \dfrac{1}{\sin^2 t};$

в) $\operatorname{tg}(-x) \cdot \operatorname{ctg} x - \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = -\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x - \dfrac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2} = -1 - \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = -(1 + \operatorname{tg}^2 x) = -\dfrac{1}{\cos^2 x};$

г) $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{9}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{9} - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x;$

д) $\operatorname{ctg}^2 x(1 - \cos x)(1 + \cos x) = \operatorname{ctg}^2 x(1^2 - \cos^2 x) = \operatorname{ctg}^2 x(1 - \cos^2 x) = \operatorname{ctg}^2 x(\cos^2 x + \sin^2 x -$

$- \cos^2 x) = \operatorname{ctg}^2 x \sin^2 x = \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \cdot \sin^2 x = \cos^2 x;$

е) $\dfrac{\sin^2\alpha - 1}{1 - \cos^2\alpha} - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\sin^2\alpha - (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) - \cos^2\alpha} - 1 = \dfrac{\sin^2\alpha - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \cos^2\alpha} - 1 =$

$= \dfrac{-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - 1 = -\operatorname{ctg}^2\alpha - 1 = -(\operatorname{ctg}^2\alpha + 1) = -\dfrac{1}{\sin^2\alpha}.$