Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ

Если мы действительно что-то знаем, то мы знаем это благодаря изучению математики.

П. Гессенди

В настоящее время традиционные формы проведения выпускных и вступительных экзаменов по математике заменены тестированием.

Предлагаемое учебное пособие адресовано учащимся для подготовки к централизованному тестированию по математике, а также может быть полезно при изучении соответствующих разделов курса математики средней общеобразовательной школы.

Пособие включает тестовые задания различной степени сложности, которые представляют все виды задач, встречающихся на централизованном тестировании. В сборнике содержится около 1500 заданий, кроме того, более 500 решенных задач с объяснениями. Разнообразие тестовых заданий, а также наличие ответов позволяют использовать пособие при проведении групповых и индивидуальных занятий и для самоподготовки. Последовательная работа с изданием дает возможность приобрести навык в решении математических задач.

В книге подробно рассмотрены вопросы, которым в школьной программе уделяется недостаточно внимания, в частности описывается решение задач с параметром.

Весь материал книги распределен по семи разделам:

I. Арифметические и алгебраические преобразования.
II. Уравнения. Системы уравнений. Неравенства.
III. Показательная и логарифмическая функции. Уравнения. Неравенства. Системы.
IV. Тригонометрия.
V. Производная и ее применение.
VI. Геометрия.
VII. Текстовые задачи.

Каждый раздел поделен на три блока.

В первом блоке приводится необходимый теоретический материал, позволяющий устранить пробелы в знаниях, а также повторить и систематизировать изученное. Некоторые сведения поданы в виде таблиц, что значительно облегчает их восприятие.

Во втором блоке разбираются примеры решения типовых задач различных уровней сложности.

Третий блок представлен тестовыми заданиями, которые снабжены вариантами ответов. Правильный ответ отмечен крестиком ☒.

Данное учебное пособие может быть эффективно использовано учащимися и абитуриентами, а также учителями и репетиторами.

Желаем успехов!

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

I

1. ЧИСЛА. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

1.1. Натуральные числа. Делитель, кратное. Простые и составные числа

Числа, употребляемые при счете предметов, называются ***натуральными***. Множество натуральных чисел обозначается буквой $\boldsymbol{N}$. Наименьшее натуральное число — единица. Наибольшего натурального числа нет. Для записи натуральных чисел используются цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Число, состоящее из a сотен, b десятков и c единиц, записывается в виде $\overline{abc} = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$. Аналогично, $\overline{abcd} = a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d$, где a — цифра тысяч, b — цифра сотен, c — цифра десятков, d — цифра единиц.

Если натуральное число n делится на натуральное число m без остатка, т. е. $n = mk$, где $k \in \boldsymbol{N}$, то число m называют *делителем* числа n, а число n — *кратным* числа m. Запись $n \vdots m$ означает, что n делится на m нацело.

Натуральное число, не равное единице, называется ***простым***, если оно имеет только два делителя: единицу и само это число. Например: 2, 3, 5, 7, 11, 17 — простые числа.

Натуральное число называется ***составным***, если оно имеет более двух делителей. Например: 6, 15, 24, 36 — составные числа.

Число 1 не является ни простым, ни составным.

Признаки делимости натуральных чисел

1. Для делимости на 2 нужно, чтобы последняя цифра числа была четная или 0.
2. Для делимости на 3 нужно, чтобы сумма цифр числа делилась на 3.
3. Для делимости на 4 нужно, чтобы две последние цифры числа были 00 или образовывали число, делящееся на 4.
4. Для делимости на 5 нужно, чтобы последняя цифра числа была 0 или 5.
5. Для делимости на 8 нужно, чтобы три последние цифры числа были 000 или образовывали число, делящееся на 8.
6. Для делимости на 9 нужно, чтобы сумма цифр числа делилась на 9.
7. Для делимости на 10 нужно, чтобы последняя цифра числа была 0.
8. Для делимости на 11 нужно, чтобы разность между суммой цифр, стоящих на четных местах, и суммой цифр, стоящих на нечетных местах, делилась на 11.
9. Для делимости на 25 нужно, чтобы две последние цифры числа были 00 или образовывали число (25, 50 или 75), делящееся на 25.

Пример 1. Найти наибольшее натуральное число, которое при делении на 15 с остатком дает частное, равное 19.

Решение. Пусть искомое число a. Так как a делится на 15 с остатком и частное при этом равно 19, то можно записать: $a = 15 \cdot 19 + r$, где r — остаток. $15 \cdot 19 = 285$, а наибольший остаток равен 14, значит, $a = 285 + 14 = 299$.

Ответ: 299.

Пример 2. Найти все натуральные числа вида $\overline{2x5y}$ (x — цифра сотен, y — цифра единиц), которые делятся на 12. В ответ записать их количество.

Решение. Число $\overline{2x5y}$ делится на 12, значит, оно делится на 3 и 4. По признаку делимости на 4 число, записанное двумя последними цифрами ($\overline{5y}$), должно делиться на 4, следовательно, y может быть равен 2 и 6. По признаку делимости на 3 сумма цифр числа $(2 + x + 5 + y)$ должна делиться на 3. Если $y = 2$, то $9 + x$ делится на 3 при $x = 0$, $x = 3$,

$x = 6$, $x = 9$. Получим четыре числа: 2052, 2352, 2652, 2952. Если $y = 6$, то $13 + x$ делится на 3 при $x = 2$, $x = 5$, $x = 8$. Получим еще три числа: 2256, 2556, 2856. Итак, всего семь чисел.

Ответ: 7.

1.2. Наибольший общий делитель. Наименьшее общее кратное

> ***Общим делителем*** натуральных чисел называется натуральное число, служащее делителем для каждого из них.

> ***Наибольшим общим делителем*** натуральных чисел называется наибольшее натуральное число, являющееся делителем всех данных чисел.

Способы нахождения наибольшего общего делителя (НОД)

1. Разложить числа на простые множители и найти произведение общих простых множителей, взяв каждый из них с наименьшим (из имеющихся) показателем.
2. Выписать все общие делители чисел и выбрать из них наибольший.
3. Поэтапно заменять большее из двух имеющихся чисел на разность между ним и меньшим до тех пор, пока числа не станут равными (алгоритм Евклида).
4. Разделить большее число на меньшее, затем меньшее число разделить на остаток от первого деления, далее первый остаток — на второй и т. д. Последний ненулевой остаток в этом процессе и будет НОД данных чисел (алгоритм Евклида в виде последовательности делений с остатками).

> ***Общим кратным*** натуральных чисел называется натуральное число, кратное каждому из них.

> ***Наименьшим общим кратным*** натуральных чисел называется наименьшее натуральное число, кратное этим числам.

Чтобы найти наименьшее общее кратное (НОК) нескольких чисел, надо разложить эти числа на простые множители и найти произведение всех получившихся простых множителей, взяв каждый из них с наибольшим (из имеющихся) показателем.

> Натуральные числа a и b называются ***взаимно простыми***, если их наибольший общий делитель равен 1.

> Для двух натуральных чисел всегда выполняется равенство
> $$\text{НОД}\ (a;\ b)\cdot\text{НОК}\ (a;\ b) = a\cdot b.$$

Пример 1. Найти НОД (32; 76).

Решение. Разложим данные числа на простые множители: $32 = 2^5$; $76 = 2^2\cdot 19$. Следовательно, НОД (32; 76) $= 2^2 = 4$.

Ответ: 4.

Пример 2. Найти НОД (1044; 1512; 2436).

Решение. Разложим эти числа на простые множители:

$$1044 = 2^2\cdot 3^2\cdot 29;\qquad 1512 = 2^3\cdot 3^3\cdot 7;\qquad 2436 = 2^2\cdot 3\cdot 7\cdot 29.$$

Выпишем общие простые множители из разложений этих чисел: 2^2, 3. Перемножим их.

Ответ: 12.

Пример 3. Найти НОД (42; 36).

Решение. Выпишем натуральные делители числа 42 — это 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42. Выберем из них наибольшее число, которое является делителем числа 36.

Ответ: **6**.

Пример 4. Найти НОД (945; 301).

Решение. Воспользуемся алгоритмом Евклида:

945	644	343	42	42	42	42	42
301	301	301	301	259	217	175	133

42	42	42	35	28	21	14	7
91	49	7	7	7	7	7	7

О т в е т: 7.

Пример 5. Найти НОД (493; 221).

Р е ш е н и е. Воспользуемся алгоритмом Евклида в виде последовательности делений с остатком. Удобно пользоваться схемой

$$\begin{array}{llll}
 & & -\,493 & \underline{|\,221} \\
 & & \underline{\,442} & 2 \\
 & -\,221 & \underline{|\,51} & \\
 & \underline{\,204} & 4 & \\
-\,51 & \underline{|\,17} & & \\
\underline{\,51} & 3 & & \\
\,0 & & &
\end{array}$$

Итак, 17 — последний ненулевой остаток.

О т в е т: 17.

Пример 6. Найти НОК (1044; 1512; 2436).

Р е ш е н и е. Разложим данные числа на простые множители:

$$1044 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 29; \quad 1512 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7; \quad 2436 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 29.$$

Выпишем все множители одного из них, например большего числа — 2436, и припишем к ним недостающие множители из разложений других чисел: $2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 29 \cdot 3^2 \cdot 2$. Перемножив их, получим ответ.

О т в е т: 43 848.

Пример 7. Произведение двух чисел равно 10 800, а их НОД равен 60. Найти НОК этих чисел.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой НОК $(a; b) \cdot$ НОД $(a; b) = a \cdot b$. Из условия известно, что $a \cdot b = 10\,800$; НОД $(a; b) = 60$. Тогда

$$\text{НОК } (a; b) = 10\,800 : 60 = 180.$$

О т в е т: 180.

Пример 8. Найти все пары натуральных чисел, НОД которых равен 5, а НОК равно 105.

Решение. По условию задачи, НОД $(a; b) = 5$; НОК $(a; b) = 105$, где a и b — искомые числа. Так как числа имеют НОД, то каждое из них можно разложить на множители: $a = m \cdot n$; $b = m \cdot k$, где m, n, k — натуральные числа. Значит, НОД $(a; b) = m = 5$; НОК $(a; b) = m \cdot n \cdot k = 105$. Получим систему условий

$$\begin{cases} m = 5, \\ m \cdot n \cdot k = 105; \end{cases} \qquad \begin{cases} m = 5, \\ k \cdot n = 21. \end{cases}$$

Число 21 имеет делители: 1, 3, 7, 21. Его можно разложить на множители: $1 \cdot 21$; $3 \cdot 7$. Тогда получим системы

$$\begin{cases} m = 5, \\ k = 1, \\ n = 21 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} m = 5, \\ k = 3, \\ n = 7 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} m = 5, \\ k = 7, \\ n = 3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} m = 5, \\ k = 21, \\ n = 1. \end{cases}$$

Из каждой системы имеем:

$$\begin{cases} a = 105, \\ b = 5 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a = 35, \\ b = 15 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a = 15, \\ b = 35 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a = 5, \\ b = 105. \end{cases}$$

Таким образом, мы получили две пары чисел: (5; 105); (15; 35).

Ответ: (5; 105); (15; 35).

Пример 9. Найти два натуральных числа, сумма которых равна 85, а НОК равно 102.

Решение. По условию задачи, $a + b = 85$; НОК $(a; b) = 102$, где a и b — искомые числа. Разложим a и b на множители: $a = m \cdot n$; $b = m \cdot k$, где m, n, k — натуральные числа. Значит,

НОК $(a; b) = m \cdot n \cdot k = 102$; $a + b = m \cdot n + m \cdot k = m(n + k) = 85$.

Получим систему

$$\begin{cases} m(n+k) = 85, \\ m \cdot n \cdot k = 102. \end{cases}$$

Число 85 имеет делители: 1, 5, 17. Получим системы

$$\begin{cases} m = 1, \\ n + k = 85, \\ n \cdot k = 102 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} m = 5, \\ n + k = 17, \\ 5 \cdot n \cdot k = 102 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} m = 17, \\ n + k = 5, \\ n \cdot k = 6. \end{cases}$$

Первая и вторая системы не имеют решения, так как m, n, k — натуральные числа. А из последней системы следует, что $n = 2$; $k = 3$ или $n = 3$; $k = 2$. Тогда $a = 34$; $b = 51$ или $a = 51$; $b = 34$.

Ответ: 34; 51.

1.3. Целые, рациональные и действительные числа

Два числа, равные по модулю, но противоположные по знаку, называются *противоположными*.

Натуральные числа, противоположные им числа и число 0 составляют вместе множество ***целых*** чисел. Множество целых чисел обозначается буквой $\boldsymbol{Z}$.

Число вида $\frac{m}{n}$, где m, $n \in \boldsymbol{N}$, называется ***обыкновенной дробью***.

Число m называется числителем дроби, число n — знаменателем.

Дробь называется *правильной*, если ее числитель меньше знаменателя, и *неправильной*, если ее числитель больше знаменателя или равен ему.

Основное свойство дроби

Если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же число, не равное 0, то получится дробь, равная данной, т. е. $\frac{m}{n} = \frac{m \cdot p}{n \cdot p}$, где $p \neq 0$.

Число вида $\frac{m}{n}$, где $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$, называется ***рациональным***.

Множество рациональных чисел обозначается буквой $\boldsymbol{Q}$.

Правила выполнения арифметических действий над рациональными числами

1. **Сложение** $\frac{m}{n}+\frac{a}{b}=\frac{mb+an}{nb}$.

2. **Вычитание** $\frac{m}{n}-\frac{a}{b}=\frac{mb-an}{nb}$.

3. **Умножение** $\frac{m}{n}\cdot\frac{a}{b}=\frac{ma}{nb}$.

4. **Деление** $\frac{m}{n}:\frac{a}{b}=\frac{m}{n}\cdot\frac{b}{a}=\frac{mb}{na}$.

Десятичные дроби — это такие обыкновенные дроби, у которых знаменатель — единица с нулями, т. е. 10; 100; 1000 и т. д.

Десятичные дроби записываются без знаменателей. Сначала пишется целая часть числа, справа от нее ставится запятая; первая цифра после запятой означает число десятых (т. е. десятых долей единицы), вторая — сотых, третья — тысячных и т. д. Цифры, стоящие после запятой, называются десятичными знаками.

Бесконечной называется десятичная дробь, у которой после запятой бесконечно много цифр.

Каждое рациональное число $\frac{m}{n}$ может быть представлено в виде конечной или бесконечной десятичной дроби. Это достигается делением числителя на знаменатель.

Обыкновенная несократимая дробь $\frac{m}{n}$ может быть записана конечной десятичной дробью тогда и только тогда, когда ее знаменатель не содержит никаких других простых множителей, кроме 2 или 5.